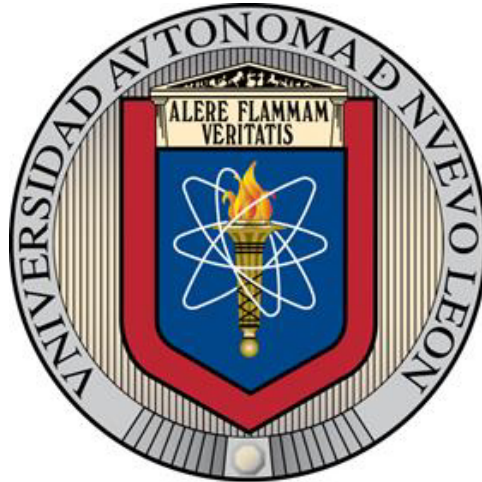


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



TESIS

**ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE UN CONJUNTO DE CONTROLADORES
ROBUSTOS MEDIANTE ACOTAMIENTO DE SUS PARÁMETROS PARA
SISTEMAS LTI CON INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA**

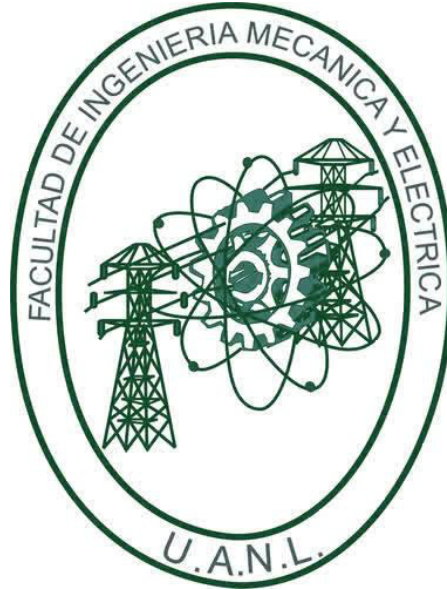
POR

M.C. MARIO ALBERTO LÓPEZ VEGA

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

NOVIEMBRE, 2016

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



TESIS

**ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE UN CONJUNTO DE CONTROLADORES
ROBUSTOS MEDIANTE ACOTAMIENTO DE SUS PARÁMETROS PARA
SISTEMAS LTI CON INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA**

POR

M.C. MARIO ALBERTO LÓPEZ VEGA

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

NOVIEMBRE, 2016

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Subdirección de Estudios de Posgrado


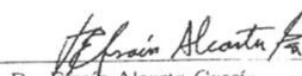
Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Análisis y Síntesis de un conjunto de controladores robustos mediante acotamiento de sus parámetros para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica.», realizada por el alumno M.C. Mario Alberto López Vega, con número de matrícula 1505407, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica

El Comité de Tesis

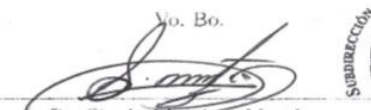


Dr. César Elizondo González

Asesor


Dr. Cornelio Pesadas Castillo
Revisor
Dr. Gerardo Romero Galván
Revisor
Dr. Efraín Alcorta García
Revisor
Dr. Roque Martínez Ortiz
Revisor

Vo. Bo.


Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirección de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León,

15 de noviembre de 2016

*A Dios por cuidarme y acompañarme en todo momento,
A mis padres Blanca Y Cecilio por su apoyo incondicional, sus consejos, su cariño
y motivación, gracias por ser los mejores padres del mundo*

*A mi esposa Verónica por su amor, su respaldo, comprensión y apoyo en todo
momento, gracias por esas palabras que me impulsaron a concluir con esta tesis*

Doctoral,

*A mis hermanas Cecy y Dulce en quienes espero sembrar motivación para
continuar con sus estudios de posgrado*

*A mi Director de tesis, el Dr. César Elizondo González por guiarme en la parte
académica al transmitirme sus conocimientos pero además por sus consejos de
vida, sabiduría y sobre todo gracias por su amistad,*

*A mis maestros de la UANL pero en especial a el Dr. Efraín Alcorta García, a el
Dr. Cornelio Posadas Castillo, a el Dr. David Díaz Romero y a el Dr. Gerardo
Romero Galván por sus comentarios sobre el trabajo de tesis, su paciencia y
amistad.*

ÍNDICE GENERAL

Resumen	xv
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema	1
1.2. Objetivos	4
1.2.1. Objetivo General	4
1.2.2. Objetivos Particulares	4
1.3. Antecedentes	5
1.3.1. Introducción a Controladores PID	5
1.3.2. Arquitectura de los controladores PID	6
1.3.3. Desventajas de un controlador PID	6
1.4. Estructura de la tesis	8
2. Conceptos Preliminares	10
2.1. Introducción	10
2.2. Retroalimentación e Incertidumbre	11

2.3. Preliminares Matemáticos	13
2.3.1. Criterio de estabilidad de C. Elizondo	13
2.3.2. Estabilidad Relativa	14
3. Positividad Robusta de Funciones Multivariables	16
3.1. Aritmética de Intervalos	17
3.1.1. Historia	17
3.1.2. Introducción	17
3.1.3. Aritmética de Intervalos para números complejos	18
3.1.4. Problema de Dependencia	19
3.2. Polinomios de Bernstein	20
3.2.1. Historia	20
3.2.2. Introducción	21
3.2.3. Polinomios de Bernstein de grado 1	22
3.2.4. Polinomios de Bernstein de grado 2	23
3.2.5. Polinomios de Bernstein de grado 3	23
3.3. Descripción de Descomposición de Signo	24
3.3.1. Historia	24
3.3.2. Introducción	25
3.3.3. Definición de la Operación	26
3.3.4. Representación (f_n, f_p)	27

3.3.5. Propiedades en la Representación (f_n, f_p)	28
3.3.6. Representación (α, β)	32
3.3.7. Propiedades en la Representación (α, β)	33
3.3.8. Partes Lineal, No-lineal e Independiente	34
3.3.9. Propiedades Básicas de las Partes Lineal y No-lineal	36
3.3.10. Límites de la Función	38
3.4. Teorema de Determinación de Signo mediante Partición de Cajas. . .	40
3.5. Ventajas de descomposición de signo	42
4. Resultados principales	44
4.1. Incertidumbre en sistemas y procesos	44
4.1.1. Tipos de Incertidumbre	45
4.2. Análisis y Síntesis de Controladores Robustos	47
4.3. Algoritmo con un parámetro del controlador	48
4.3.1. Ejemplo Ilustrativo	51
4.4. Algoritmo con dos parámetros del controlador	59
4.4.1. Ejemplo Ilustrativo	62
4.5. Algoritmo con tres parámetros del controlador	66
4.6. Ejemplos Ilustrativos	68
5. Aplicaciones	74
5.1. Control de velocidad de un motor de inducción.	74

5.1.1. Planteamiento del Problema	75
5.1.2. Solución del Problema	76
5.2. Control de un misil	79
5.2.1. Planteamiento del Problema	80
5.2.2. Solución del Problema	81
6. Conclusiones y recomendaciones para trabajo a futuro	85

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1. Polinomios de Bernstein de grado 1	22
3.2. Polinomios de Bernstein de grado 2	23
3.3. Polinomios de Bernstein de grado 3	24
3.4. Rectángulo que contiene a la función en el plano (f_p, f_n)	30
3.5. Rectángulo en el plano (α, β)	34
3.6. Cajas Γ	36
3.7. Teorema del polígono	39
3.8. Positividad Robusta en cajas Γ^1 y Γ^3	41
3.9. Partición de cajas Γ donde la función no cumple positividad robusta.	42
4.1. Configuración de perturbación aditiva	46
4.2. Configuración de perturbación inversa aditiva	46
4.3. Diagrama de bloques del servomecanismo de posición.	52
4.4. Región de estabilidad preestablecida	54
4.5. Descripción gráfica del algoritmo de dos parámetros	61

4.6. Diagrama de bloques del sistema con incertidumbre y controlador con retroalimentación unitaria	62
4.7. Región de estabilidad del sistema para el polinomio $p(s - a, q)$	65
4.8. Región de estabilidad del sistema para el polinomio $p(-s - b, q)$. . .	66
4.9. Valores de ganancia q_5, q_6 para $q_4 = 1.4$	71
4.10. Valores de ganancia q_5, q_6 para distintos q_4	72
4.11. Conjunto de controladores PID para $p(s - a, q)$	73
4.12. Conjunto de controladores PID para $p(-s - b, q)$	73
5.1. Sistema con retroalimentación unitaria en cascada con un controlador PI	75
5.2. Región de Estabilidad Robusta dada por los parámetros del controlador para $p(s - a)$	78
5.3. Región de Estabilidad Robusta dada por los parámetros del controlador para $p(-s - b)$	78
5.4. Respuesta del sistema para una entrada escalón en la región de estabilidad robusta.	79
5.5. Diagrama de bloques del sistema completo.	80
5.6. Región de Estabilidad Robusta dada por los parámetros del controlador para $p(s - a)$	82
5.7. Región de Estabilidad Robusta dada por los parámetros del controlador para $p(-s - b)$	83
5.8. Respuesta a un escalón unitario mostrando un equilibrio en el sistema	84

ÍNDICE DE TABLAS

4.1. Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para $p(s-a)$ de un servomecanismo posicional.	57
4.2. Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para $p(-s-b)$ de un servomecanismo posicional	58

RESUMEN

M.C. Mario Alberto López Vega.

Candidato para obtener el grado de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio: ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE UN CONJUNTO DE CONTROLADORES
ROBUSTOS MEDIANTE ACOTAMIENTO DE SUS PARÁMETROS PARA SISTEMAS
LTI CON INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA..

Número de páginas: 91.

RESUMEN: La teoría de Control Robusto se enfoca en el análisis y síntesis de sistemas de control que mantengan las características del sistema ante incertidumbres que se presenten. La presente tesis, muestra un nuevo enfoque basado en **Descomposición de Signo** para encontrar las ganancias de un conjunto de controladores PID que permiten que la familia de sistemas que se generan por la incertidumbre en sus parámetros sea robustamente estable. Se considera el caso más complejo, en donde la familia de polinomios característicos con incertidumbre paramétrica de la planta y el controlador son funciones multivariantes polinómicas.

Se propone un marco para la sintonización de un controlador con n grados, en la tesis es desarrollado hasta grado tres, es decir, para uno, dos o tres parámetros

del controlador, con incertidumbre también en la planta. El resultado es apoyado en el criterio de estabilidad de Elizondo que tiene la ventaja de no requerir división, y un teorema de estabilidad relativa que permite que la parte real de las raíces del polinomio característico del sistema retroalimentado se encuentren en una región predeterminada dando de manera muy sencillo un cierto desempeño.

Finalmente se muestran ejemplos ilustrativos para la aplicación de estas herramientas en casos generales.

Firma del asesor: _____

Dr. César Elizondo González

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El diseño de los sistemas de control ha jugado un papel importante para el desarrollo de la ingeniería en sus diversos campos de estudio.

El control robusto consiste en definir una estructura de control que tenga un desempeño acorde a las especificaciones del sistema, asumiendo desde el comienzo que existe una incertidumbre en los parámetros del sistema.

Por lo tanto el control robusto paramétrico es de vital importancia en los procesos industriales debido a que las técnicas clásicas de control funcionan bien en simulación pero fallan en la práctica ya que no es tomada la incertidumbre paramétrica.

Este trabajo de tesis desarrolla una metodología que permite el diseño de controladores robustos para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica y cuya aplicación puede darse en diferentes áreas como son: control de aeronaves, robótica, áreas de control de procesos químicos, etc.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se describe de forma general la importancia de la teoría de control robusto; ya que ésta es la clave para obtener mejores diseños. Este razona-

miento actúa como un estímulo para las ideas y aportaciones tanto abstractas como avanzadas que se presentan a lo largo de la tesis.

La teoría de control robusto para sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), ha crecido notablemente en años recientes. Su popularidad se ha extendido en el ámbito industrial en donde es necesario de su conocimiento para el buen diseño de controladores robustos en diversos campos de la ingeniería como son: sistemas eléctricos, neumáticos, mecánicos, químicos, etc. Su rápida aceptación es debido a:

- La sencillez de aplicación y relevancia a problemas prácticos en la ingeniería de control.
- La contribución a la sistematización del proceso de síntesis de un controlador.

Anteriormente los procesos a ser controlados eran representados por funciones de transferencia simples o bien en representaciones en espacio de estado. Dichas dinámicas eran analizadas y los controladores eran diseñados de tal manera que el sistema en lazo cerrado fuera por lo menos estable y cumpliera con cierto desempeño deseado. El control clásico se enfoca en las propiedades de los sistemas de control en el dominio de la frecuencia y ha desarrollado métodos de diseño basados en herramientas gráficas simples pero muy poderosas como diagramas de Nyquist, diagramas de Bode y cartas de Nichols. Sin embargo éstas técnicas fueron diseñadas para sistemas nominales fijos, en general, son de aplicación complicada cuando están presentes varios parámetros con incertidumbre. La dificultad radica en que, por ejemplo, para un análisis de estabilidad, es necesario aplicar las técnicas gráficas a todo el número infinito de elementos que componen la familia del sistema LTI con incertidumbre paramétrica $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_\ell]^T$, el conjunto de todos los vectores q que existen forman una caja de incertidumbre paramétrica $Q = \{q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_\ell]^T | q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ \forall i = 1, 2, \dots, \ell\}$ y el aplicar estas técnicas a cada elemento que forma la caja de incertidumbre resulta totalmente impráctico.

El término robusto en el desarrollo de éste trabajo se refiere al hecho que el

diseño de los sistemas de control que persigue operen en un entorno de incertidumbre con respecto a la dinámica del sistema.

Para el estudio sobre control robusto, es necesario mencionar los siguientes puntos: el tipo de incertidumbre que se enfrenta, desempeño del sistema de control bajo dichas incertidumbres y si se trata de un problema de análisis o síntesis del controlador.

En el desarrollo de esta investigación se enfrentan dos tipos de problemas:

Problema de Análisis: Dado un controlador, determinar si las señales controladas (incluidos errores de seguimiento, las señales de control, etc.) cumplen con las propiedades y comportamiento deseado para todos los ruidos admisibles, perturbaciones e incertidumbres en el modelo.

Problema de Síntesis: El diseño de un sistema de control de tal manera que las señales controladas cumplan con las propiedades y comportamiento deseado para todos los ruidos admisibles, perturbaciones e incertidumbres en el modelo.

En la realidad industrial no existe un sistema en particular a analizar, lo que hay que analizar es una familia de sistemas. Es por eso que surge una pregunta básica que tiene que ver con la robustez: La familia de polinomios característicos que describen el comportamiento del sistema $P(s, Q)$ es estable

Los criterios clásicos de estabilidad se aplican a un polinomio específico con parámetros fijos $p(s, q)$. Y uno podría pensar en repetir el criterio o prueba de estabilidad muchas veces para distintos valores de dichos parámetros q_i elemento de Q , lo cual es totalmente impráctico y nos motiva al desarrollo de éste trabajo de investigación.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GENERAL

Desarrollar una metodología de diseño de un conjunto controladores capaces de dar estabilidad robusta relativa a la familia de sistemas continuos LTI con incertidumbre paramétrica, entendiéndose por estabilidad relativa que la parte real de las raíces del polinomio característico del lazo cerrado se encuentre dentro de un intervalo preestablecido.

1.2.2 OBJETIVOS PARTICULARES

- El desarrollo de algoritmos que permitan el cálculo de la ganancia de las cotas de los parámetros del controlador que satisfagan estabilidad robusta relativa.
- Realización de un estudio comparativo entre las técnicas y algoritmos propuestos anteriormente por diversos autores, en cuanto al diseño de controladores robustos y los resultados obtenidos.
- Desarrollo de ejemplos de aplicaciones reales que permitan la implementación del algoritmo y demuestren de manera más clara los resultados obtenidos.

1.3 ANTECEDENTES

1.3.1 INTRODUCCIÓN A CONTROLADORES PID

La gran capacidad de los controladores de tipo proporcional integral (PI) y proporcional integral derivativo (PID) para el control de la mayoría de los procesos industriales ha dado lugar a su amplia aceptación en diversas aplicaciones industriales.

Se sabe que sólo del 5 al 10 % de los lazos de control no pueden ser controlados por controladores PI o PID para una sola entrada una sola salida (SISO) [38]; en particular, estos controladores funcionan bien para los procesos con dinámicas benignos y requerimientos de desempeño modestos [4].

Por otra parte, el 98 % de los lazos de control en las industrias para la fabricación de papel con pulpa de celulosa son controlados por controladores PI en SISO [12] y que, en aplicaciones de control de procesos, más del 95 % de los controladores son de tipo PID [4].

La implementación de los controladores PI o PID se recomienda para el control de los procesos de baja a mediano fin con retardos de tiempo pequeños, también se recomienda hacer uso de las reglas de sintonización conocidas para los parámetros del controlador. Aunque, en pruebas hechas a miles de lazos de control en cientos de plantas, se encontró que más del 30 % de los controladores instalados están operando en el modo manual, es decir son sintonizados de manera empírica o por cierta experiencia en determinado proceso y el 65 % de los lazos operan en modo automático. Lo que es más preocupante, es que teniendo en cuenta la gran cantidad de información disponible en la literatura para determinar los parámetros del controlador de forma automática gran cantidad se hace de manera manual [23].

1.3.2 ARQUITECTURA DE LOS CONTROLADORES PID

El controlador PI ideal para un proceso de una sola entrada—una sola salida (SISO) es como sigue:

$$U(s) = G_c(s)E(s) \quad (1.1)$$

con

$$G_c(s) = K_c(1 + \frac{1}{T_i s}) \quad (1.2)$$

El controlador PID ideal para un proceso de una sola entrada—una sola salida (SISO) se expresa en el dominio de Laplace como sigue:

$$G_c(s) = K_c(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s) \quad (1.3)$$

y con K_c = ganancia proporcional, T_i = constante de tiempo integral, T_d = constante de tiempo derivativa.

La introducción de la acción integral facilita el logro de la igualdad entre el valor medido y el valor deseado, el error es integrado, lo cual tiene la función de promediarlo o sumarlo por un período determinado; luego es multiplicado por una constante I . Posteriormente, la respuesta integral es adicionada al modo proporcional para formar el control $P + I$ con el propósito de obtener una respuesta estable del sistema sin error estacionario.

La introducción de la acción derivativa significa que los cambios en el valor deseado pueden ser anticipados, y por lo tanto una corrección adecuada se puede añadir antes del cambio real. Así, en términos simples, el controlador PID permite contribuciones de entradas presentes, pasadas y futuras del controlador.

1.3.3 DESVENTAJAS DE UN CONTROLADOR PID

Mientras que los controladores PID son aplicables a la mayoría de los problemas de control, pueden ser pobres en otras aplicaciones. Los controladores PID, cuando

se usan solos, pueden dar un desempeño pobre cuando la ganancia del lazo del PID debe ser reducida para que no se dispare u oscile sobre el valor del "setpoint". El desempeño del sistema de control puede ser mejorado combinando el lazo cerrado de un control PID con un lazo abierto. Conociendo el sistema se puede tener un control prealimentado combinado con la salida del PID para aumentar el desempeño final del sistema. Solamente el valor del control prealimentado puede proveer la mayor porción de la salida del controlador. El controlador PID puede ser usado principalmente para responder a cualquier diferencia o "error" que quede entre el setpoint y el valor actual del proceso. Como la salida del lazo del control no se ve afectada a la realimentación del proceso, nunca puede causar que el sistema oscile, aumentando el desempeño del sistema, su respuesta y estabilidad. Por ejemplo, en la mayoría de los sistemas de control con movimiento, para acelerar una carga mecánica, se necesita de más fuerza (o torque) para el motor. Si se usa un lazo PID para controlar la velocidad de la carga y manejar la fuerza o torque necesaria para el motor, puede ser útil tomar el valor de aceleración instantánea deseada para la carga, y agregarla a la salida del controlador PID. Esto significa que sin importar si la carga está siendo acelerada o desacelerada, una cantidad proporcional de fuerza está siendo manejada por el motor además del valor de realimentación del PID. El lazo del PID en esta situación usa la información de la realimentación para incrementar o decrementar la diferencia entre el setpoint y el valor del primero. Trabajando juntos, la combinación control-realimentación provee un sistema más confiable y estable. Otro problema que posee el PID es que es lineal. Principalmente el desempeño de los controladores PID en sistemas no lineales es variable. También otro problema común que posee el PID es, que en la parte derivativa, el ruido puede afectar al sistema, haciendo que esas pequeñas variaciones, hagan que el cambio a la salida sea muy grande. Generalmente un Filtro pasa bajo (FPB) ayuda, ya que elimina las componentes de alta frecuencia del ruido. Sin embargo, un FPB y un control derivativo pueden hacer que se anulen entre ellos.

Alternativamente, el control derivativo puede ser sacado en algunos sistemas

sin mucha pérdida de control. Esto es equivalente a usar solamente un PI.

1.4 ESTRUCTURA DE LA TESIS

La estructura de la tesis es como sigue:

Capítulo dos. *Conceptos Preliminares.* Se expone un breve contenido acerca de conceptos importantes en el desarrollo de este trabajo, la importancia de la retroalimentación así como la incertidumbre que puede existir en diversos procesos o sistemas. Además algunos criterios de estabilidad, el primero es un criterio de estabilidad de C. Elizondo que traslada el problema de estabilidad robusta a uno de positividad robusta de una función multivariable polinómica. El segundo un criterio de estabilidad relativa con fines de desempeño.

Capítulo tres. *Positividad Robusta de funciones multivariables.* En este capítulo se analizan las distintas herramientas capaces de resolver el problema de positividad robusta de funciones multivariables polinómicas, sus ventajas y desventajas y se plantea como la solución a este problema puede aplicarse también a la solución de una amplia gama de problemas de control y optimización.

Capítulo cuatro. *Resultados Principales*

Se presenta una solución a la problemática mediante dos algoritmos, ambos capaces de determinar un conjunto de controladores que satisfacen estabilidad robusta relativa, es decir, que la parte real de las raíces de un sistema con incertidumbre paramétrica se encuentren en una región preestablecida.

Capítulo cinco. *Aplicaciones.* En este capítulo se presenta el resultado de este trabajo para distintas aplicaciones. Se determina un conjunto de controladores que satisfacen estabilidad robusta relativa para distintos casos reales.

Capítulo seis. *Conclusiones, recomendaciones y trabajo futuro.* En este capítulo

lo se presentan las contribuciones de esta tesis, las recomendaciones observadas a lo largo del desarrollo de este trabajo así como diversas líneas de futuro trabajo.

CAPÍTULO 2

CONCEPTOS PRELIMINARES

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se muestran algunos conceptos que permiten ubicar el trabajo realizado. Tales conceptos son importantes para el desarrollo de este trabajo, además se presentan algunos preliminares matemáticos utilizados para la solución al problema descrito anteriormente.

Un sistema de control es un dispositivo o conjunto de dispositivos, que gestiona, comanda, dirige o regula el comportamiento de otro dispositivos o sistemas. Los sistemas de control en la industria se utilizan para la producción industrial, que es una importante fuente de riqueza de un país, ya que se logra impulsar la economía a través del fortalecimiento y crecimiento de empresas manufactureras de manera que éstas sean capaces de exportar productos competitivos, reinvertir en su propia expansión y generar empleos.

La incertidumbre paramétrica en los sistemas de control es un tema estudiado recientemente debido a la importancia que tiene dentro de la industria. Los sistemas con incertidumbre son una clase amplia que comprende sistemas de diversa naturaleza (continuo – discreto, lineal – no lineal, etc.) que se caracterizan por la presencia

de parámetros parcialmente desconocidos, ya que se desconoce su valor exacto pero se conoce el intervalo al que pertenece. Para sistemas con incertidumbre es necesario implementar estrategias de diseño de control robusto paramétrico con el objetivo de llevar a cabo el análisis y síntesis de controladores que permitan la estabilidad en presencia de estos valores inciertos del sistema.

2.2 RETROALIMENTACIÓN E INCERTIDUMBRE

Los dos problemas fundamentales en el diseño de un sistema de control son la estabilidad y el desempeño del sistema en lazo cerrado.

Un control debe de estar diseñado de tal manera que se garantice estabilidad en el lazo cerrado del sistema al que se aplica. Estabilidad en el lazo cerrado es el requerimiento mínimo para cualquier control y si el sistema es lineal significa que a estado cero el origen es asintóticamente estable.

El término **retroalimentación** es usado para referirse a una situación en la que dos (o más) sistemas dinámicos están conectados entre sí de tal manera que cada sistema influye en el otro y su dinámica está fuertemente acoplada. Por sistema dinámico, nos referimos a un sistema cuyo comportamiento cambia con el tiempo, a menudo en respuesta a una estimulación o fuerza externa [5].

El objetivo principal de establecer un control en retroalimentación es minimizar los efectos sobre condiciones iniciales desconocidas o influencias externas sobre el comportamiento del sistema, sujeto a la restricción de no tener una representación completa del sistema. Este es entonces el principal reto; ya que el comportamiento deseado se espera de un sistema controlado. Las estrategias utilizadas para lograr esto se hacen a través de un modelo de sistema inexacto o con incertidumbre en sus parámetros.

El desempeño de un sistema en lazo cerrado se refiere a la habilidad de seguir

una señal de referencia lo más cercano posible así como la capacidad para el rechazo de perturbaciones. El controlador tiene que ser diseñado de tal manera que las salidas controladas sigan los valores preestablecidos a pesar de la presencia de perturbaciones o dinámicas no modeladas.

Incertidumbre. La incertidumbre es la estimación cuantitativa de los errores presentes en los datos medidos, todas las mediciones contienen alguna incertidumbre generada a través de muchos tipos de errores. Una idea muy simple y natural, para derrotar a la incertidumbre, es la de rodear los valores de medición de incertidumbre en intervalos reales cerrados, es decir acotar los parámetros inciertos y entonces utilizar técnicas para el buen manejo de la incertidumbre.

Incertidumbre Paramétrica. En un sentido estricto, la incertidumbre paramétrica surge cuando algún aspecto del modelo del sistema no es totalmente conocido en el momento de análisis y síntesis del diseño de control. El ejemplo típico aquí es el valor desconocido de un parámetro del que solamente se conocen sus límites inferior y superior.

Los modelos son una aproximación de la realidad, por lo que modelos de sistemas dinámicos pudieran no cubrir algunos fenómenos físicos tales como desajuste de componentes que pueda modificar el valor de algunos parámetros del sistema. Como consecuencia se puede afectar el desempeño para el cual fue diseñado el lazo de control.

Esta tesis se centra en el tipo de incertidumbres para cada parámetro del sistema y controlador conocida como incertidumbre paramétrica real a diferencia de otras técnicas como $H\infty$ las cuales enfrentan el problema de incertidumbre de manera general conocida como incertidumbre no estructurada.

2.3 PRELIMINARES MATEMÁTICOS

2.3.1 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE C. ELIZONDO

Este criterio de estabilidad presenta una tabla a partir de la cual se determina el número de raíces de un polinomio real que se encuentran en el semiplano derecho del plano complejo. Dicha tabla se fundamenta en El Principio del Argumento, Índices de Cauchy, Cadenas de Sturm y Cadenas de Sturm modificadas. La tabla presenta algunas ventajas: las operaciones numéricas se reducen con respecto a otros criterios y los coeficientes son funciones multivariadas polinómicas cuya positividad robusta se obtiene en condiciones necesarias y suficientes utilizando descomposición de signo [19, 20, 21], determinando entonces la estabilidad robusta para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica.

Teorema 2.3.1. [21] Dado un polinomio $p(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots + C_{n-1}s^{n-1} + C_ns^n$ con coeficientes reales, el número de raíces a la derecha del plano de los complejos es igual al número de variaciones de signo en la columna σ en el siguiente arreglo.

σ_1	C_n	C_{n-2}	C_{n-4}	\dots
σ_2	C_{n-1}	C_{n-3}	C_{n-5}	\dots
σ_3	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	\dots	
σ_4	$e_{4,1}$	$e_{(4,2)}$	\dots	
\vdots	\vdots	\vdots		
$\sigma_{(n-1)}$	$e_{(n-1),1}$	$e_{(n-1),2}$		
σ_n	$e_{(n,1)}$			
σ_{n+1}	$e_{(n+1),1}$			

$$e_{i,j} = (e_{i-1,1}e_{i-2,j+1} - e_{i-2,1}e_{i-1,j+1}), \forall 3 \leq i \leq n+1$$

$$e_{i,j} = C_{n+1-i-2(j-1)} \forall i \leq 2$$

$$\sigma_i = \text{Sign}(e_{i,1}) \forall i \leq 2$$

$$\sigma_i = \text{Sign}(e_{i,1}) \prod_{j=1}^{(i+1-m)/2} \text{Sign}(e_{(m+2(j-1)),(1)}) \forall i \geq 3$$

$m = 3$ para i par, $m = 2$ para i non.

La metodología de cálculo del signo σ_i de un renglón es mucho más sencilla que lo que aparenta la expresión matemática que lo determina: el signo σ_i de un renglón se determina multiplicando el signo de $e_{(i),1}$ por el signo del elemento inmediato superior a éste, es decir el de $e_{(i-1),1}$ y por los signos de los elementos superiores de la columna e "brincando" de dos en dos. Por ejemplo: $\sigma_7 = \text{sign}(e_{(7),1})\text{sign}(e_{(6),1})\text{sign}(e_{(4),1})\text{sign}(e_{(2),1})$.

En el caso de que un elemento $e_{i,1}$ sea cero, entonces se substituye el cero por un $\epsilon > 0$ y se continúa el cálculo de la tabla. En caso de todos los elementos $e_{i,j}$ de un renglón sean de valor cero, entonces se substituye el renglón completo por la derivada del renglón superior.

Debe de notarse que cada uno de los elementos $e_{i,j}$ fueron elaborados sin utilizar la división empleada en el criterio de Routh, por lo tanto los elementos $e_{i,j}$ en el caso de incertidumbre paramétrica son funciones multivariantes polinómicas.

2.3.2 ESTABILIDAD RELATIVA

En la aplicación industrial de la teoría de control, normalmente es necesario que el sistema además de ser estable tenga un cierto desempeño, para esto es necesario que las raíces de su polinomio característico guarden cierta posición en el plano de los complejos. Con esta finalidad se muestra el siguiente teorema que determina si la parte real de la raíces se encuentra contenida en una región específica de los reales.

Teorema 2.3.2. [22] Sea $p(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + s^n$ el polinomio característico con coeficientes reales positivos correspondiente un sistema LTI, sean a y b dos

números reales positivos. Entonces las raíces de $p(s)$ están localizadas, en el plano de los complejos, a la izquierda de $-a$ y a la derecha de $-b$ si y solo si los polinomios $p(s - a)$ y $p(-s - b)$ son asintóticamente estables.

CAPÍTULO 3

POSITIVIDAD ROBUSTA DE FUNCIONES MULTIVARIABLES

La Positividad Robusta es una potente característica que juega un papel importante en varios campos de la mecánica, las matemáticas, la estadística y la investigación en general. Muchas condiciones de estabilidad complejas que surgen en el análisis y síntesis de sistemas de control pueden reducirse a condiciones de positividad de polinomios multivariables.

La teoría de positividad de funciones multivariables polinómicas aporta nuevos conocimientos teóricos en una amplia gama de problemas de control y optimización. La positividad de polinomios se puede utilizar para formular un gran número de problemas en el control robusto, de control no lineal así como dar solución a problemas que afectan a la convexidad [31].

Existen tres herramientas importantes para la solución de problemas con positividad robusta, las cuales se describen brevemente a continuación:

1. Aritmética de Intervalos
2. Polinomios de Bernstein

3. Descomposición de Signo

3.1 ARITMÉTICA DE INTERVALOS

3.1.1 HISTORIA

Aritmética de intervalos no es un fenómeno nuevo en las matemáticas, en realidad ha aparecido varias veces a lo largo de la historia solo que con diferentes nombres. Por ejemplo Arquímedes calculó límites inferior y superior para el numero "pi" como $223/71 \leq \Pi \leq 22/7$ tres siglos a.C.

La Aritmética de intervalos es un método desarrollado por Ramon Moore en 1957, surge como un acercamiento a errores de redondeo ligados en el cálculo matemático. La teoría de análisis del intervalo surgió considerando una solución exacta y el término error como uno solo [28]

3.1.2 INTRODUCCIÓN

Aritmética de intervalo puede ser especialmente útil cuando se trabaja con datos que están sujetos a errores de medición o incertidumbres y es utilizada entonces como un método para poner límites a los errores de redondeo o errores de medición en el cálculo matemático.

Las operaciones básicas de aritmética de intervalos, para dos intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$, que son subconjuntos de la línea real $[-\infty, \infty]$ son:

- $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$
- $[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$

- $[a, b] \times [c, d] = [\min(a \times c, a \times d, b \times c, b \times d), \max(a \times c, a \times d, b \times c, b \times d)]$
- $[a, b] \div [c, d] = [\min(a \div c, a \div d, b \div c, b \div d), \max(a \div c, a \div d, b \div c, b \div d)]$

El enfoque principal en la aritmética de intervalos está en la forma más sencilla para calcular puntos extremos superior e inferior para el rango de valores de una función en una o más variables. Estas cotas no son necesariamente el supremo o ínfimo, ya que el cálculo preciso de esos valores puede ser difícil o imposible. El método se limita normalmente a intervalos reales, de la forma:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\},$$

donde:

$$a > -\infty \text{ y } b < \infty$$

De la misma manera que se realizan los cálculos para los números reales se realizan para Aritmética de intervalos, es decir operaciones aritméticas sencillas. Para funciones sencillas se deben definir estas operaciones y para funciones más complicadas se calculan a partir de estas definiciones.

3.1.3 ARITMÉTICA DE INTERVALOS PARA NÚMEROS COMPLEJOS

Un intervalo también se puede definir como un lugar geométrico de puntos a una distancia dada desde el centro, y ésta definición se extiende para los números reales y para los números complejos. Es posible realizar cálculos y operaciones de números reales como para números complejos con incertidumbre en sus parámetros.

Por lo tanto, dado el hecho que un intervalo de un número es un intervalo real cerrado y un número complejo es un par ordenado de números reales, no hay

razón para limitar la aplicación de aritmética de intervalos como medida de incertidumbre en únicamente operaciones con números reales. Aritmética de Intervalos puede extenderse a intervalos de números complejos, para determinar regiones de incertidumbre en el cálculo con números complejos.

Las operaciones algebraicas básicas para los números de intervalos reales (intervalos cerrados reales) se pueden extender a los números complejos. Aritmética de intervalos compleja es similar a la aritmética de números complejos ordinaria, pero con algunas diferencias [27]. Se puede demostrar que al igual que en la aritmética de intervalos reales, no existe la propiedad distributiva entre la suma y la multiplicación para intervalos de números complejos a excepción de algunos casos especiales y los elementos inversos no siempre existen para intervalos de números complejos [27]. Otras dos propiedades útiles de la aritmética ordinaria de números complejos que no se mantienen en la aritmética de intervalos de complejos son: las propiedades aditivas y las propiedades multiplicativas.

3.1.4 PROBLEMA DE DEPENDENCIA

El llamado problema de la dependencia es un gran obstáculo para la aplicación de la aritmética de intervalos. Aunque los métodos de intervalo pueden determinar el rango de operaciones aritméticas elementales para funciones de forma muy precisa, esto no siempre es cierto con funciones más complicadas. Si un intervalo ocurre varias veces en el cálculo de los parámetros, y cada una de estas veces es tomada de manera independiente, entonces esto puede conducir a una expansión no deseada de los intervalos resultantes.

Un ejemplo de este problema se describe a continuación: Si tomamos la función f definida por $f(x) = x^2 + x$. Los valores de esta función en el intervalo $[-1, 1]$ son realmente $[-\frac{1}{4}, 2]$. El intervalo natural de esta función es calculado como $[-1, 1]^2 + [-1, 1] = [0, 1] + [-1, 1] = [-1, 2]$, la cual es ligeramente más grande, en lugar de

esto se tiene que calcular el ínfimo y supremo de la función $h(x, y) = x^2 + y$ tal que, $x, y \in [-1, 1]$. Entonces tendremos una mejor expresión para f en el que la variable x solo aparecerá una vez, es decir re-escribiendo $f(x) = x^2 + x$ como una suma y elevando al cuadrado tenemos que $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$. Así que el cálculo adecuado de este intervalo es:

$$([-1, 1] + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]^2 - \frac{1}{4} = [0, \frac{9}{4}] - \frac{1}{4} = [-\frac{1}{4}, 2]$$

dando los valores correctos. En general, se observa que el rango de valores pueden ser calculados, si cada variable aparece si y sólo si f es continua dentro de la caja. Aunque, no siempre la función podrá re-escribirse de esta manera.

El problema de dependencia causa una sobre estimación o estimación errónea de los valores de los intervalos, generando conclusiones equivocadas.

3.2 POLINOMIOS DE BERNSTEIN

3.2.1 HISTORIA

La teoría de Polinomios de Bernstein se introdujo originalmente por Sergei Natanovich Bernstein para facilitar una prueba constructiva sobre el teorema de aproximación de Weierstrass cuyo resultado afirma que las funciones reales continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado pueden ser aproximadas tanto como se quiera por un polinomio. Es decir, los polinomios de coeficientes reales son densos en el conjunto de las funciones continuas sobre un intervalo cerrado.

La demostración sobre esta prueba constructiva se hizo en 1912 y ha tenido un profundo impacto en muchas áreas. Los polinomios de Bernstein han estimulado el desarrollo de la teoría básica, sencilla y eficiente de algoritmos recursivos, teoría de probabilidad, teoría de sumas de series divergentes y una diversificación cada vez

mayor de aplicaciones [8].

3.2.2 INTRODUCCIÓN

Los polinomios son herramientas matemáticas muy útiles, ya que son sencillos de definir, pueden calcularse rápidamente por computadoras y representan una gran variedad de funciones. Pueden derivarse o integrarse fácilmente, pueden combinarse entre sí para formar curvas diferenciables definidas en porciones las llamadas (spline curves) las cuales aproximan cualquier función con la precisión deseada.

Los polinomios de Bernstein o polinomios en la base de Bernstein son una clase particular de polinomios en el campo de los números reales, que son utilizados dentro del ámbito del análisis numérico.

Un polinomio de Bernstein $p(x)$ de orden n aproxima una función $f(x)$, en un intervalo mejor cuanto mayor sea n , a partir de esta fórmula:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n c_i B_i^n(x)$$

donde los $B_i^n(x)$ son elementos de la distribución binomial respecto de la variable x , y los c_i , son valores de la función que queremos aproximar. Para aproximar la función en el intervalo $[0, 1]$, estos elementos toman los siguientes valores:

$$c_i = f\left(\frac{i}{n}\right) \quad B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

y más en general transformando las ecuaciones para un intervalo $[a, b]$, los $B_i^n(x)_{[a,b]}$ se convierten en polinomios de la base de Bernstein:

$$c_i = f\left(i \frac{b-a}{n} + a\right) \quad y \quad B_i^n(x)_{[a,b]} = \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}$$

Así, la fórmula general desarrollada es:

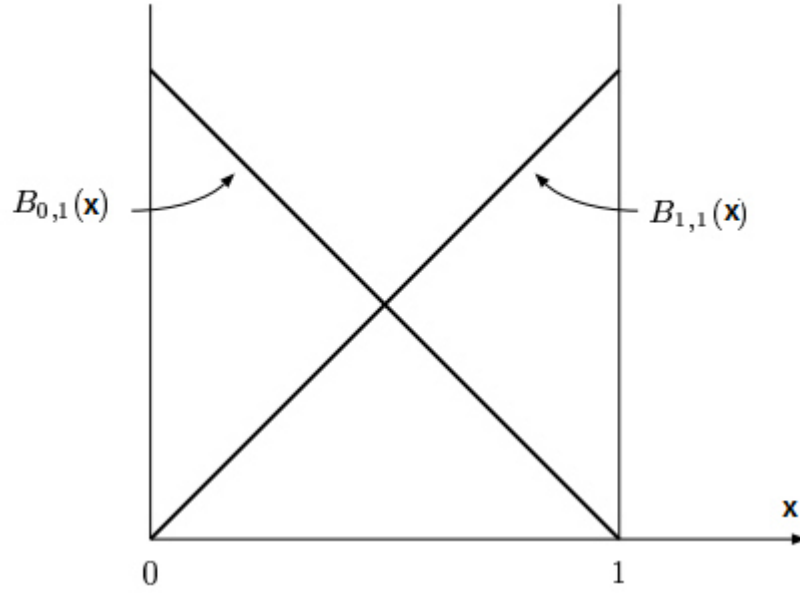


Figura 3.1: Polinomios de Bernstein de grado 1

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f\left(i \frac{b-a}{n} + a\right) \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}$$

Para casos simples tenemos entonces los siguientes polinomios:

3.2.3 POLINOMIOS DE BERNSTEIN DE GRADO 1

Los polinomios de Bernstein de grado 1 son:

$$B_{0,1}(x) = 1 - x$$

$$B_{1,1}(x) = x$$

y se grafica de $0 \leq t \leq 1$ de la siguiente manera:

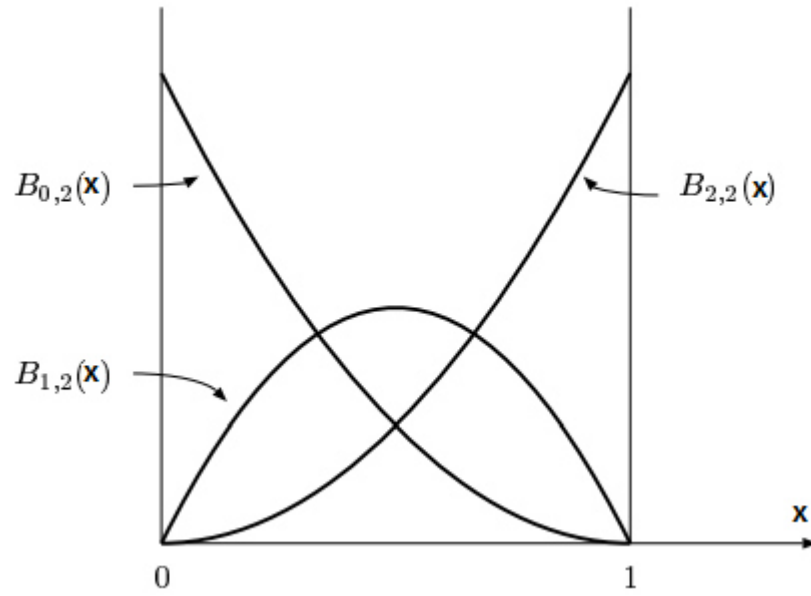


Figura 3.2: Polinomios de Bernstein de grado 2

3.2.4 POLINOMIOS DE BERNSTEIN DE GRADO 2

Los polinomios de Bernstein de grado 2 son:

$$B_{0,2}(x) = (1 - x)^2$$

$$B_{1,2}(x) = 2x(1 - x)$$

$$B_{2,2}(x) = x^2$$

y se grafica de $0 \leq x \leq 1$ de la siguiente manera:

3.2.5 POLINOMIOS DE BERNSTEIN DE GRADO 3

Los polinomios de Bernstein de grado 3 son:

$$B_{0,3}(x) = (1 - x)^3$$

$$B_{1,3}(x) = 3x(1-x)^2$$

$$B_{2,3}(x) = 3x^2(1-x)$$

$$B_{3,3}(x) = x^3$$

y se grafica de $0 \leq x \leq 1$ de la siguiente manera:

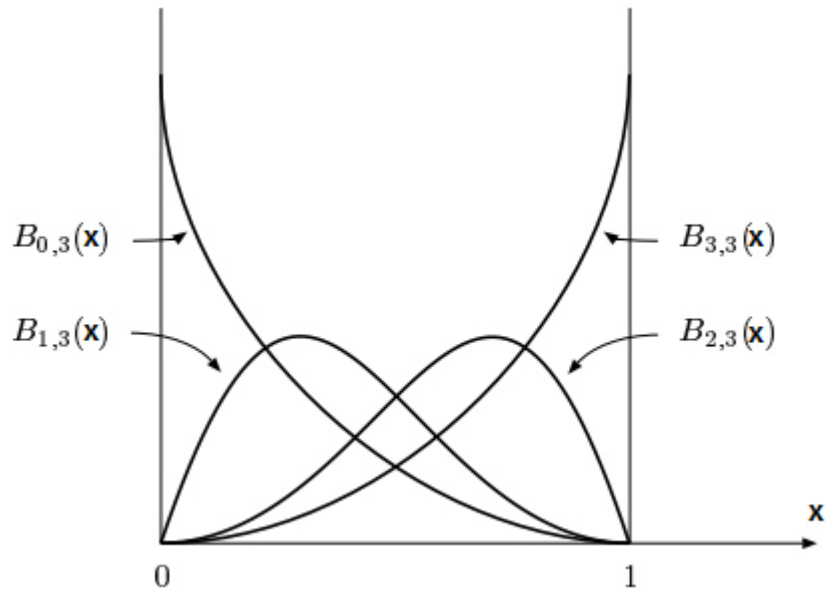


Figura 3.3: Polinomios de Bernstein de grado 3

3.3 DESCRIPCIÓN DE DESCOMPOSICIÓN DE SIGNO

3.3.1 HISTORIA

La herramienta matemática descomposición de signo o como algunos autores la mencionan “descomposición de signo definida” comenzó basada en distintas ideas desarrolladas por César Elizondo González durante su investigación de tesis doctoral

en 1999. Descomposición de signo fue desarrollada como un trabajo basado en ortogonalidad sin seguir las líneas de investigación contemporánea en donde las ideas o trabajos ortogonales normalmente no estaban bien vistos.

Haciendo uso de ésta herramienta se han desarrollado diversos trabajos de investigación por su creador y otros investigadores mostrando la facilidad de aplicación, el potencial de la herramienta y las ventajas que se tienen sobre algunas otras en distintos campos de la teoría de control como son: [19, 20, 24, 32, 33, 34, 35, 36]

3.3.2 INTRODUCCIÓN

En el área de control robusto paramétrico se manejan propiedades como: estabilidad robusta, controlabilidad robusta y observabilidad robusta. El cumplimiento de cualquiera de estas propiedades en un sistema LTI con incertidumbre paramétrica puede ser mapeado a un problema de positividad robusta de una función multivariable polinómica dependiente en un vector de parámetros $q = [q_1 q_2 \cdots q_\ell]^T$, de cada parámetro se conocen solamente las cotas inferior y superior $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$ y el conjunto de todos los vectores q forman una caja de incertidumbre paramétrica $Q = \{q = [q_1 q_2 \cdots q_\ell]^T | q_i \in [q_i^-, q_i^+] \forall i\}$. Para resolver el problema de positividad robusta de funciones multivariable polinómicas dependientes de un vector con incertidumbre paramétrica q , fue desarrollado en [19] la siguiente herramienta matemática.

Descomposición de signo [19], [20] es una herramienta matemática que mediante el análisis de puntos extremos es capaz de determinar en condiciones necesarias y suficientes la positividad robusta de una función multivariable polinómica.

3.3.3 DEFINICIÓN DE LA OPERACIÓN

Al analizar una función es común la necesidad de descomponer ésta en sus partes que la constituyen de acuerdo al caso, por ejemplo si se está haciendo un análisis de un polinomio $p(s)$, puede ser útil descomponerlo en sus partes par e impar; si se está haciendo el análisis de un polinomio en el dominio de la frecuencia $p(j\omega)$, normalmente es útil descomponerlo en sus partes real e imaginaria, pero si se está haciendo el análisis de la positividad de una función, podemos pensar en descomponerla en sus partes positiva y negativa. La determinación de la positividad de una función real polinómica multivariable es un problema difícil de resolver, normalmente se le ve a la función real como un todo completo y posiblemente eso aumenta la dificultad del problema, en vez de ver la función descompuesta en sus posibles partes que la constituyen. En este caso se propone descomponer una función multivariable $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ en sus partes positiva y negativa $f_p(\cdot)$, $f_n(\cdot)$, para poder definir esta descomposición, es necesario primeramente recordar el concepto de *cono convexo positivo* $P = \{x \in \mathbb{R}^\ell | x_i \geq 0\}$ [19], así como las siguientes definiciones:

Definición 1. [29] Sea P un cono convexo positivo en un espacio vectorial \mathbb{R}^ℓ , para $x, y \in \mathbb{R}^\ell$ se dice que $x \geq y$ ($x > y$) con respecto a P si $x - y \in P$ ($x - y \in P^\circ$, el interior de P).

Definición 2. [19, 20] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ un subconjunto convexo, se dice que $f(\cdot)$ es una función no-decreciente en Q si $x \geq y$ implica $f(x) \geq f(y)$, $\forall x, y \in Q$.

Las funciones no-decrecientes presentan algunas propiedades interesantes respecto a las operaciones de suma y multiplicación como se muestran mas adelante.

Definición 3. [19, 20] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ un subconjunto convexo, se dice que $f(\cdot)$ tiene descomposición de signo en Q si existen dos funciones acotadas no-decrecientes $f_n(\cdot) \geq 0$, $f_p(\cdot) \geq 0$, tales que $f(q) =$

$f_p(q) - f_n(q)$ para toda $q \in Q$. Dichas funciones se llamarán: la parte positiva de la función $f_p(\cdot)$ y la parte negativa de la función $f_n(\cdot)$.

$$\begin{aligned} f(q) &= f_p(q) - f_n(q) \quad \forall q \in Q \\ f_p(\cdot) &\triangleq \text{Parte Positiva de } f(\cdot) \\ f_n(\cdot) &\triangleq \text{Parte Negativa de } f(\cdot) \end{aligned}$$

Nota 3.3.1. Los nombres “parte positiva” y “parte negativa”, son sólo por facilidad de expresión, realmente deben ser interpretados como: parte no negativa y parte no positiva respectivamente.

Debe notarse que si una función está definida en $Q' \subset \mathbb{R}^\ell$ que no está contenida en un cono convexo positivo, entonces se puede hacer una transformación de coordenadas para que la función quede definida en $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ como se muestra en el siguiente hecho.

Hecho 3.3.1. [19, 20] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en $\hat{Q} \subset \mathbb{R}^\ell$ que no está contenida en un cono convexo positivo, entonces siempre se puede hacer una transformación de coordenadas $\hat{q}_i = \hat{q}_i^- + (q_i - q_i^-)(\hat{q}_i^+ - \hat{q}_i^-)/(q_i^+ - q_i^-)$ tal que $q_i^+ > q_i^- \geq 0$ para que la función quede definida en $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$.

3.3.4 REPRESENTACIÓN (f_n, f_p)

Cuando una función continua $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ se descompone en $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ en sus partes positiva y negativa $f_p(\cdot)$ y $f_n(\cdot)$, realmente se está haciendo una transformación de \mathbb{R}^ℓ a \mathbb{R}^2 , la representación gráfica de la función en un plano (f_n, f_p) es de utilidad para entender más fácilmente las propiedades que poseen las partes positiva y negativa de la función, para lo cual se establece la siguiente proposición.

Proposición 3.3.1. [19, 20] Toda función continua $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ con descomposición de signo en el conjunto convexo $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$, se puede expresar como una

transformación de \mathbb{R}^ℓ a \mathbb{R}^2 mediante sus partes positiva y negativa $f_p(\cdot)$ y $f_n(\cdot)$ con representación gráfica en el plano (f_n, f_p) .

$$\mathbb{R}^\ell \xrightarrow{(f_n(\cdot), f_p(\cdot))} \mathbb{R}^2$$

Cuando una función con descomposición de signo en Q es igual a cero para todo q elemento de Q , implica que $f_p(q) = f_n(q) \forall q \in Q$ y su representación gráfica en el plano (f_n, f_p) es una línea recta a 45° que contiene al origen, a la cual nos referiremos como *la recta a 45°* , los puntos arriba de ella corresponden a la representación gráfica de funciones con valor positivo y obviamente los de abajo a negativo.

3.3.5 PROPIEDADES EN LA REPRESENTACIÓN (f_n, f_p)

Las funciones que poseen descomposición de signo presentan la propiedad de conservar la descomposición de signo en las operaciones de suma, resta y multiplicación como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. [19, 20] Sean $f, g : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones con descomposición de signo en Q ; entonces: $f(q) + g(q)$, $f(q) - g(q)$ y $f(q)g(q)$ son funciones que tienen descomposición de signo en Q :

$$\begin{aligned} f(q) + g(q) &= (f(q) + g(q))_p - (f(q) + g(q))_n \\ (f(q) + g(q))_n &= (f_n(q) + g_n(q)), \quad (f(q) + g(q))_p = (f_p(q) + g_p(q)) \\ f(q) - g(q) &= (f(q) - g(q))_p - (f(q) - g(q))_n \\ (f(q) - g(q))_n &= (f_n(q) - g_n(q)), \quad (f(q) - g(q))_p = (f_p(q) - g_p(q)) \\ f(q)g(q) &= (f(q)g(q))_p - (f(q)g(q))_n \end{aligned}$$

$$(f(q)g(q))_n = (f_p(q)g_n(q) + f_n(q)g_p(q)), \quad (f(q)g(q))_p = (f_p(q)g_p(q) + f_n(q)g_n(q))$$

La forma como se obtiene la resta de cualquier par de funciones en el teorema 3.3.1 asegura que las expresiones de la parte positiva y negativa sean funciones no negativas y no-decrecientes, pero existe el caso particular donde se pueden obtener expresiones más simples.

Otras propiedades de las funciones que tienen descomposición de signo, son las referentes a las cotas de la función, para lo cual es necesario definir algunos conceptos antes de analizar dichas propiedades.

Definición 4. [19, 20] Se le llamará *vértice mínimo y máximo Euclidiano* v^{\min} , v^{\max} a los vectores elementos de $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ con mínima y máxima norma Euclidiana respectivamente.

$$\|v^{\min}\|_2 = \min_{q \in Q} \|q\|_2, \quad \|v^{\max}\|_2 = \max_{q \in Q} \|q\|_2$$

Lema 3.3.1. [19, 20] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua no-decreciente y sea $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min} , v^{\max} , entonces:

$$\min_{q \in Q} f(q) = f(v^{\min}), \quad \max_{q \in Q} f(q) = f(v^{\max})$$

La aplicación del lema anterior 3.3.1 a las partes positiva y negativa de una función permite obtener una propiedad del acotamiento de cada una de estas partes como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.2. [19, 20] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función con descomposición de signo en Q , sea $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min} , v^{\max} , entonces las partes positiva y negativa de la función están acotadas como se muestra:

$$f_p(v^{\min}) \leq f_p(q) \leq f_p(v^{\max}) \quad \forall q \in Q, \quad f_n(v^{\min}) \leq f_n(q) \leq f_n(v^{\max}) \quad \forall q \in Q$$

El hecho de que las partes positiva y negativa de una función estén limitadas por sus valores mínimo y máximo da lugar a poder obtener cotas de la función analizando solo sus partes positiva y negativa en los vértices mínimo y máximo Euclidianos como aparece en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.3. [19, 20] (*Teorema del Rectángulo*) Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min}, v^{\max} , entonces: **a)** $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max})$ y $f_p(v^{\max}) - f_n(v^{\min})$ respectivamente, **b)** la representación gráfica de la función $f(q)$, $\forall q \in Q$ en el plano (f_n, f_p) está contenida en el rectángulo con vértices $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\min}))$, $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\max}))$, $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$ y $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$, **c)** si el vértice inferior derecho $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$ está arriba de la recta de 45° entonces la función $f(q) > 0 \forall q \in Q$, **d)** si el vértice superior izquierdo $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$ está abajo de la recta de 45° entonces la función $f(q) < 0 \forall q \in Q$.

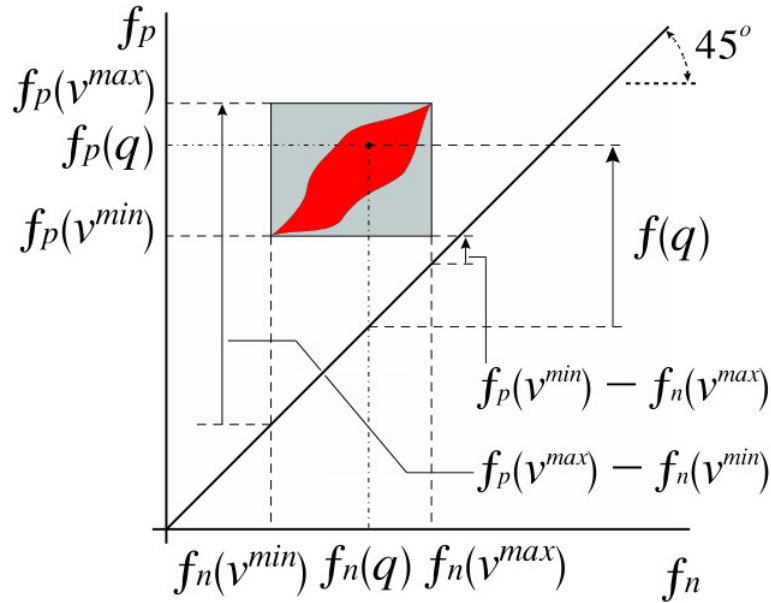


Figura 3.4: Rectángulo que contiene a la función en el plano (f_p, f_n)

La positividad de la cota inferior del teorema anterior 3.3.3, es una condi-

ción suficiente de positividad de la función. Así cuando la cota $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max})$ es negativa no implica que existan vectores q en Q para los cuales la función sea negativa, en este caso es necesario hacer una división de la caja $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ y definirla como $Q = [q_1^-, q_1^+] \times [q_2^-, q_2^+] \times \cdots \times [q_\ell^-, q_\ell^+]$, podemos dividir el intervalo de cada variable $[q_i^-, q_i^+]$ en k partes, generando k nuevos intervalos: $[q_i^-, q_i^1], [q_i^1, q_i^2], \cdots, [q_i^j, q_i^{j+1}], \cdots, [q_i^{k-1}, q_i^+]$, podemos llamarle $[\gamma_i^-, \gamma_i^+]$ a uno de los k nuevos intervalos de una de los ℓ parámetros, dando lugar así a la generación de k^ℓ nuevas cajas Γ , siendo una de ellas: $\Gamma^i = [\gamma_1^-, \gamma_1^+] \times [\gamma_2^-, \gamma_2^+] \times \cdots \times [\gamma_\ell^-, \gamma_\ell^+]$. Con lo anterior la caja original queda expresada como $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y tomando $\mu^{\min}, \mu^{\max} \in \Gamma^i$ como los vértices mínimo y máximo Euclidianos de Γ^i se puede establecer el siguiente teorema.

Lema 3.3.2. [19, 20]. Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min}, v^{\max} . Entonces la función $f(q)$ es positiva (negativa) en Q si y sólo si existe un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y Cota $\inf \geq c > 0$ para cada caja Γ^i (Cota $\sup \leq c < 0$ para cada caja Γ^i).

El determinar la positividad o negatividad de una función en todo su dominio, no es un problema fácil, de tal forma que no es raro que de las cotas obtenidas de la caja original no se pueda determinar el signo de la función en todo su dominio, necesitando así hacer uso de la división de cada variable q_i en k partes, que puede tomarse como $k = 2$ y dividir en dos partes iguales. De esta manera se generan 2^ℓ nuevas cajas Γ , si en cada una de las nuevas cajas no existe algún valor de $f(\mu^{\min})$ o $f(\mu^{\max})$ que demuestre la pérdida de condición de signo que se está determinando, entonces a la caja Γ^i que no cumpla la condición de positividad $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) > 0$ o de negatividad $f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min}) < 0$ si es lo que se está analizando se le vuelve a aplicar el proceso de dividir cada variable q_i en dos partes iguales y verificar la condición de signo que se desea determinar en cada una de las 2^ℓ nuevas cajas de Γ^i . Para una función con descomposición de signo en Q , se puede determinar el signo en todo su dominio aplicando el lema anterior 3.3.2, inicialmente con $k = 2$, dividiendo

cada variable en dos partes iguales, generando 2^ℓ cajas Γ . Mediante aplicaciones sucesivas del proceso de división en dos partes iguales a cada variable q_i sólo en la caja que así lo requiera se genera el conjunto de cajas Γ , “cerrándose” los puntos de análisis sólo donde se necesita y hasta donde se necesita, ya que la división de variables se aplica sólo en las nuevas cajas que lo requieran.

3.3.6 REPRESENTACIÓN (α, β)

La facilidad para resolver un problema depende de las coordenadas en que se este analizando, existe por lo menos un sistema de coordenadas además de (f_n, f_p) , que llamaremos (α, β) y están giradas 45° con respecto a las (f_n, f_p) , por esa razón el rectángulo que contiene a la función aparece como se observa en la figura ?? . Estas coordenadas presentan ventajas tanto en algunas operaciones matemáticas como en la interpretación gráfica.

Definición 5. [19, 20] Sean $f_n(q)$ y $f_p(q)$ las componentes de una función $f(q)$ con descomposición de signo en Q . lineal descrita tal que existe T^{-1} , entonces se le llamará una representación de la función $f(q)$ en coordenadas (α, β) a la transformación lineal $(\alpha(q), \beta(q)) = T(f_n(q), f_p(q))$ y la transformación lineal inversa de una representación $(\alpha(q), \beta(q))$ será una representación $(f_n(q), f_p(q))$ de la función.

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, & T^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \alpha(q) \\ \beta(q) \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} f_n(q) \\ f_p(q) \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} f_n(q) \\ f_p(q) \end{bmatrix} &= T^{-1} \begin{bmatrix} \alpha(q) \\ \beta(q) \end{bmatrix} \\
 \alpha(q) &= f_p(q) + f_n(q), & f_p(q) &= \frac{1}{2}(\alpha(q) + \beta(q)) \\
 \beta(q) &= f_p(q) - f_n(q), & f_n(q) &= \frac{1}{2}(\alpha(q) - \beta(q))
 \end{aligned}$$

Debe notarse que como $\alpha(q)$ es una suma de funciones no-decrecientes y no

negativas entonces $\alpha(q)$ es no-decreciente; $\beta(q) = f(q)$, y $\alpha(q) \geq \beta(q)$ para toda función $f(q)$ y para todo vector $q \in Q$.

3.3.7 PROPIEDADES EN LA REPRESENTACIÓN (α, β)

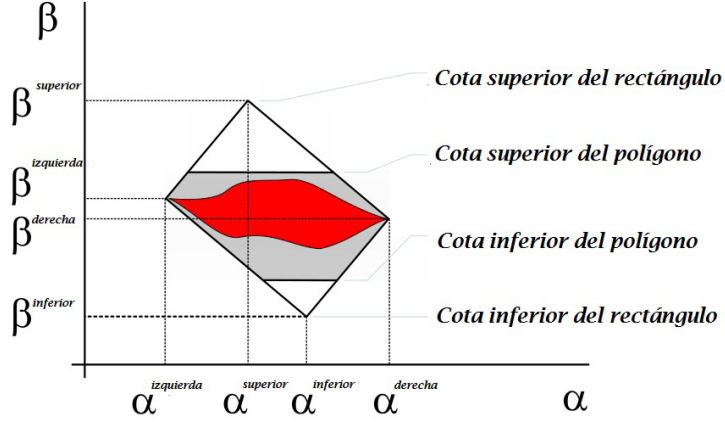
Las operaciones de suma, resta y el producto de funciones que tienen descomposición de signo, se puede efectuar en la representación (α, β) y el producto se efectúa con mayor facilidad que en (f_p, f_n) , para obtener estas propiedades son necesarios los siguientes lemas y corolario:

Lema 3.3.3. [19, 20] Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones con descomposición de signo en Q , entonces la suma, resta y multiplicación de las funciones $f_1(q), f_2(q)$ queda expresada en la representación (α, β) por:

$$\begin{array}{ll} \text{Suma } f_1(q) + f_2(q) & \alpha(q) = \alpha_1(q) + \alpha_2(q), \quad \beta(q) = \beta_1(q) + \beta_2(q) \\ \text{Resta } f_1(q) - f_2(q) & \alpha(q) = \alpha_1(q) + \alpha_2(q), \quad \beta(q) = \beta_1(q) - \beta_2(q) \\ \text{Producto } f_1(q)f_2(q) & \alpha(q) = \alpha_1(q)\alpha_2(q), \quad \beta(q) = \beta_1(q)\beta_2(q) \end{array}$$

Las transformaciones de la definición 5 permiten trasladar los resultados del teorema del rectángulo 3.3.3 de $(f_n(q), f_p(q))$ a $(\alpha(q), \beta(q))$ como se expresa en el corolario siguiente, de acuerdo a la figura ??.

Corolario 3.3.1. [19, 20] (Corolario del Rectángulo) Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min}, v^{\max} , entonces: **a)** $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por $\frac{1}{2}(\alpha(v^{\min}) + \beta(v^{\min}) - \alpha(v^{\max}) + \beta(v^{\max}))$ y $\frac{1}{2}(\alpha(v^{\max}) + \beta(v^{\max}) - \alpha(v^{\min}) + \beta(v^{\min}))$ respectivamente, **b)** la representación gráfica de la función $f(q)$, $\forall q \in Q$ en el plano (α, β) está contenida en el rectángulo con vértices: $\alpha^{izq} = \alpha(v^{\min})$, $\beta^{izq} = \beta(v^{\min})$; $\alpha^{der} = \alpha(v^{\max})$, $\beta^{der} = \beta(v^{\max})$; $\alpha^{\inf} = \frac{1}{2}(\alpha(v^{\min}) + \alpha(v^{\max})) - \frac{1}{2}(\beta(v^{\max}) - \beta(v^{\min}))$, $\beta^{\inf} = \frac{1}{2}(\beta(v^{\min}) + \beta(v^{\max})) - \frac{1}{2}(\alpha(v^{\max}) - \alpha(v^{\min}))$;

Figura 3.5: Rectángulo en el plano (α, β)

$\alpha^{\text{sup}} = \frac{1}{2}(\alpha(v^{\text{mín}}) + \alpha(v^{\text{máx}})) + \frac{1}{2}(\beta(v^{\text{máx}}) - \beta(v^{\text{mín}}))$, $\beta^{\text{sup}} = \frac{1}{2}(\beta(v^{\text{mín}}) + \beta(v^{\text{máx}})) + \frac{1}{2}(\alpha(v^{\text{máx}}) - \alpha(v^{\text{mín}}))$; **c)** si el vértice inferior $(\alpha^{\text{inf}}, \beta^{\text{inf}})$ está arriba del eje α en el plano (α, β) entonces la función $f(q) > 0 \forall q \in Q$, **d)** si el vértice superior $(\alpha^{\text{sup}}, \beta^{\text{sup}})$ está abajo del eje α en el plano (α, β) entonces la función $f(q) < 0 \forall q \in Q$.

3.3.8 PARTES LINEAL, NO-LINEAL E INDEPENDIENTE

Al analizar la positividad de una función $f(q)$ con descomposición de signo en Q con $q_j \in [q_j^-, q_j^+]$ para todo $q \in Q$, es muy común la necesidad de hacer dicho análisis en un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_j \Gamma^j$. En cada una de las cajas Γ^j con vértices mínimo y máximo Euclidianos $\mu^{\text{mín}}, \mu^{\text{máx}}$, cada componente de q se puede expresar como $q_i = \mu_i^{\text{mín}} + \delta_i$ donde $\delta_i \in [0, \delta_i^{\text{máx}}] \mid \delta_i^{\text{máx}} = \mu_i^{\text{máx}} - \mu_i^{\text{mín}}$, entonces se puede considerar la existencia de una caja Δ con vértices mínimo y máximo Euclidianos: $\mathbf{0}$ y $\delta^{\text{máx}}$ donde éste último es $\delta^{\text{máx}} = \mu^{\text{máx}} - \mu^{\text{mín}}$ y $\Delta = \{\delta \mid \delta_i \in [0, \delta_i^{\text{máx}}], \delta_i^{\text{máx}} = \mu_i^{\text{máx}} - \mu_i^{\text{mín}}\} \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$; de esta manera se puede expresar $q = \mu^{\text{mín}} + \delta \forall \delta \in \Delta, \forall q \in \Gamma$.

Es muy conocido que una función puede tener una parte lineal y otra no-lineal,

entonces la función $f(q)|_{q \in \Gamma} = f(\mu^{\min} + \delta)$ debe contener estas partes que deben ser función de δ ya que μ^{\min} es una constante en la caja Γ^j . Una manera fácil de encontrar la parte lineal y otra no-lineal es considerando que ellas no contienen términos independientes de δ , y por lo tanto son nulas al evaluarlas en $\delta = \mathbf{0}$, de tal forma que si se evalúa la función en $\delta = \mathbf{0}$ se obtiene $f(\mu^{\min} + \mathbf{0}) = f(\mu^{\min})$, siendo también esta última una parte de la función $f(q)$ que es la parte independiente de δ . Esto concuerda con la serie de Taylor de $f(q)$ donde $q = \mu^{\min} + \delta$:

$$f(q) = f(\mu^{\min}) + \sum_{i=1}^{\ell} \left. \frac{\partial f(q)}{\partial q_i} \right|_{\mu_i} \delta_i + \Phi(\delta)$$

Se puede ver que la función está compuesta de tres partes: un término independiente de δ que es $f(\mu^{\min})$, otra parte lineal que es el gradiente de la función $f(q)$ evaluado en μ^{\min} y multiplicado por el vector δ y la función $\Phi(\delta)$ que representa los términos de orden superior en δ . La parte no-lineal $\Phi(\delta)$ puede ser difícil de obtener y se puede despejar restando de $f(q)|_{q \in \Gamma} = f(\mu^{\min} + \delta)$ la parte $f(\mu^{\min})$ y la parte lineal, dando lugar así a la siguiente proposición.

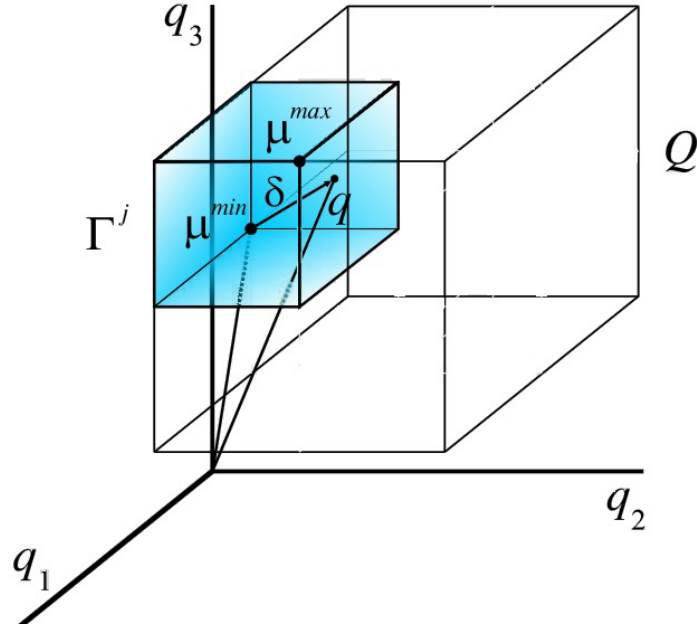
Proposición 3.3.2. [19, 20] Sea $f : \mathbb{R}^{\ell} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $Q \subset P \subset \mathbb{R}^{\ell}$, sea Γ una caja contenida en Q con un conjunto de vértices μ^{\min}, μ^{\max} , sea $\Delta = \{\delta \mid \delta_i \in [0, \delta_i^{\max}], \delta_i^{\max} = \mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}\} \subset P \subset \mathbb{R}^{\ell}$ con un conjunto de vértices $\{\delta^i\}$ con vértices mínimo y máximo Euclidianos $\mathbf{0}$ y $\delta^{\max} = \mu^{\max} - \mu^{\min}$, y sea $q \in \Gamma$ tal que $q = \mu^{\min} + \delta$ donde $\delta \in \Delta$, entonces la función $f(q)$ se puede expresar mediante sus partes lineal, no-lineal e independiente en su mínima expresión, para toda $q \in \Gamma$.

$$f(q) = f^{\min} + f_L(\delta) + f_N(\delta) \mid \delta \in \Delta \quad \forall q \in \Gamma$$

$$f^{\min} \equiv \text{Parte Independiente} = f(\mu^{\min})$$

$$f_L(\delta) \equiv \text{Parte Lineal} = \nabla f(q)|_{\mu^{\min}} \cdot \delta \quad \forall \delta \in \Delta$$

$$f_N(\delta) \equiv \text{Parte No-lineal} = f(\mu^{\min} + \delta) - f^{\min} - f_L(\delta) \quad \forall \delta \in \Delta$$

Figura 3.6: Cajas Γ

La expresión de la parte no lineal se puede lograr desarrollando $f(\mu^{\min} + \delta)$, obteniendo así una expresión algebraica de $f_N(\delta)$, si esto resulta muy complicado para alguna función en particular entonces la aplicación es sólo numérica obteniendo así sólo el valor de la parte no-lineal en el punto deseado. Como un ejemplo mucho muy simple de esta descomposición, podemos tomar la función $f(q) = 3 + 2q_1 - 4q_2 + q_1^2$, entonces $f^{\min} = 3 + 2\mu_1^{\min} - 4\mu_2^{\min} + \mu_1^{\min 2}$, $f_L(\delta) = 2\delta_1 - 4\delta_2 + 2\mu_1^{\min}\delta_1$ y $f_N(\delta) = \delta_1^2$.

3.3.9 PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS PARTES LINEAL Y NO-LINEAL

De acuerdo a la proposición 3.3.2, las partes: negativa, positiva, alfa y beta de una función se pueden descomponer en sus partes lineal, no-lineal e independiente, así también las partes lineal, no-lineal e independiente de una función, se pueden descomponer en sus partes negativa, positiva, alfa y beta.

Al hacer un análisis de positividad de una función que es resultado de la operación matemática de otras funciones, entonces se presenta la necesidad de obtener las partes lineal, no-lineal e independiente de la suma, resta o producto de funciones, que se pueden obtener mediante el siguiente hecho.

Hecho 3.3.2. [19] Sean $f_1(q)$ y $f_2(q)$ dos funciones con descomposición de signo en Q , sea $\Gamma \subseteq Q$ una caja para el cual $f_1(q) = f_1^{\min} + f_{1L}(\delta) + f_{1N}(\delta)$ y $f_2(q) = f_2^{\min} + f_{2L}(\delta) + f_{2N}(\delta) \forall q \in \Gamma$, entonces la representación alfa, beta de la suma $f_1(q) + f_2(q)$, resta $f_1(q) - f_2(q)$ y producto $f_1(q)f_2(q) \forall q \in \Gamma$ de las funciones está dado por $\alpha = \alpha^{\min} + \alpha_L(\delta) + \alpha_N(\delta)$, $\beta = \beta^{\min} + \beta_L(\delta) + \beta_N(\delta)$ de acuerdo a lo siguiente:

SUMA

$$\begin{aligned} \alpha^{\min} &= \alpha_1^{\min} + \alpha_2^{\min}, & \beta^{\min} &= \beta_1^{\min} + \beta_2^{\min}. \\ \alpha_L(\delta) &= \alpha_{1L}(\delta) + \alpha_{2L}(\delta), & \beta_L(\delta) &= \beta_{1L}(\delta) + \beta_{2L}(\delta), \\ \alpha_N(\delta) &= \alpha_{1N}(\delta) + \alpha_{2N}(\delta), & \beta_N(\delta) &= \beta_{1N}(\delta) + \beta_{2N}(\delta), \end{aligned}$$

RESTA

$$\begin{aligned} \alpha^{\min} &= \alpha_1^{\min} + \alpha_2^{\min}, & \beta^{\min} &= \beta_1^{\min} - \beta_2^{\min}. \\ \alpha_L(\delta) &= \alpha_{1L}(\delta) + \alpha_{2L}(\delta), & \beta_L(\delta) &= \beta_{1L}(\delta) - \beta_{2L}(\delta), \\ \alpha_N(\delta) &= \alpha_{1N}(\delta) + \alpha_{2N}(\delta), & \beta_N(\delta) &= \beta_{1N}(\delta) - \beta_{2N}(\delta), . \end{aligned}$$

PRODUCTO

$$\alpha^{min} = \alpha_1^{min} \alpha_2^{min}$$

$$\alpha_L(\delta) = \alpha_1^{min} \alpha_{2L}(\delta) + \alpha_2^{min} \alpha_{1L}(\delta)$$

$$\alpha_N(\delta) = \alpha_1^{min} \alpha_{2N}(\delta) + \alpha_{1L}(\delta)(\alpha_{2L}(\delta) + \alpha_{2N}(\delta)) + \alpha_{1N}(\delta)(\alpha_2^{min} + \alpha_{2L}(\delta) + \alpha_{2N}(\delta))$$

$$\beta^{min} = \beta_1^{min} \beta_2^{min}$$

$$\beta_L(\delta) = \beta_1^{min} \beta_{2L}(\delta) + \beta_2^{min} \beta_{1L}(\delta)$$

$$\beta_N(\delta) = \beta_1^{min} \beta_{2N}(\delta) + \beta_{1L}(\delta)(\beta_{2L}(\delta) + \beta_{2N}(\delta)) + \beta_{1N}(\delta)(\beta_2^{min} + \beta_{2L}(\delta) + \beta_{2N}(\delta))$$

Prueba. Descomponiendo $\alpha_i(q)$, $\beta_i(q)$ en sus partes lineal, no-lineal e independiente en el lema 3.3.3 y agrupando cada término con su semejante, se obtienen los resultados de cada una de las operaciones.

3.3.10 LÍMITES DE LA FUNCIÓN

En la proposición 3.3.2, la función se expresa como $f(q) = f^{min} + f_L(\delta) + f_N(\delta)$ para toda $q \in \Gamma$ y para toda $\delta \in \Delta$, donde f^{min} es el valor constante de la función evaluada en el vértice mínimo de Γ , $f_L(\delta)$ es la parte lineal de la función $f(q)$ que tiene su máximo y mínimo en los puntos extremos de Δ y $f_N(\delta)$ es la parte no-lineal de la función, dado que $\Delta \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$, se le puede aplicar descomposición de signo obteniendo sus cotas de valor máximo y mínimo, dando lugar así al siguiente resultado.

Teorema 3.3.4. [19, 20] (Teorema del Polígono) Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función con descomposición de signo en Q , sean: q , δ , Γ y Δ de acuerdo a la proposición 3.3.2. Entonces, **a)** la función $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por: Cota $\inf = f^{min} + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{max})$ y Cota $\sup = f^{min} + f_{L\max} + f_{Np}(\delta^{max}) \forall q \in Q$, **b)** las

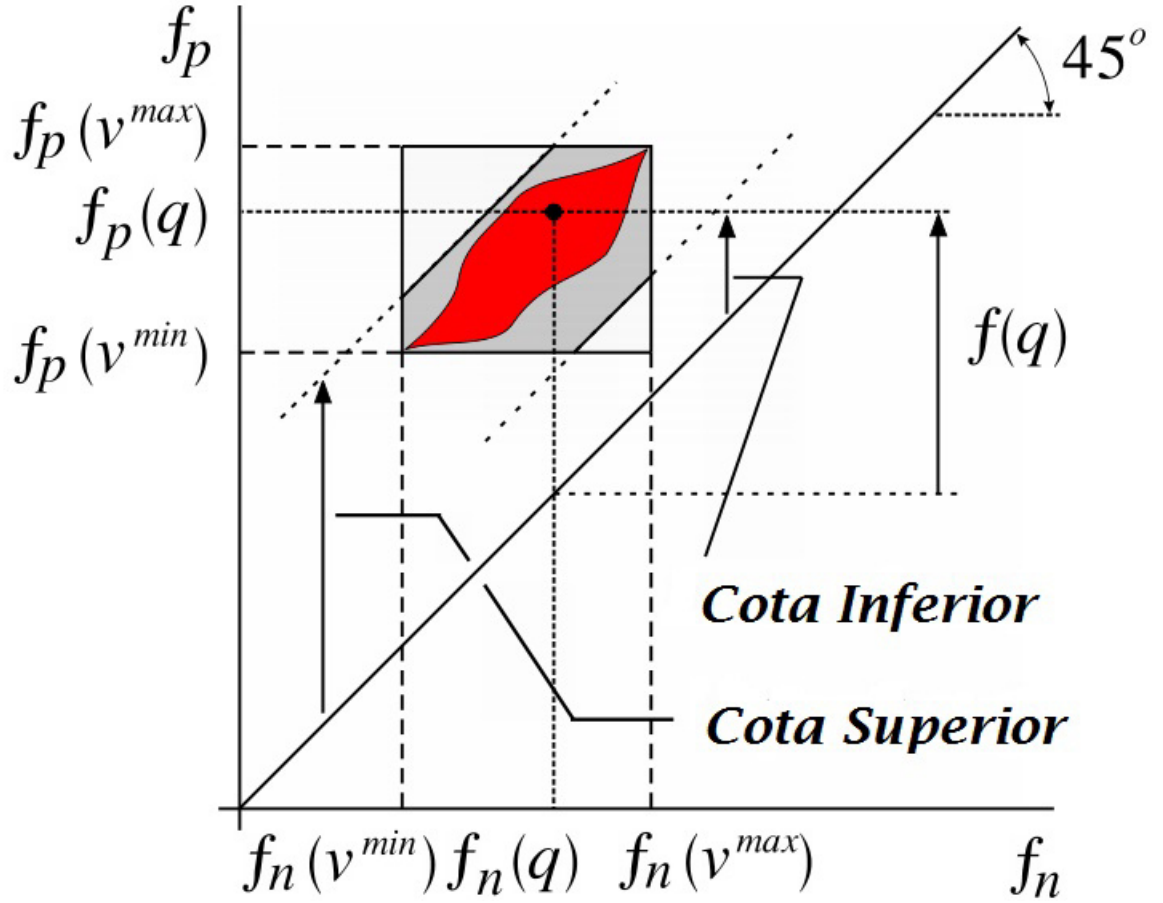


Figura 3.7: Teorema del polígono

cotas del inciso “a” están contenidas en el intervalo que definen las cotas del teorema del rectángulo 3.3.3 $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \leq Cota \text{ ínf} \leq Cota \text{ sup} \leq f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})$, **c)** la representación gráfica de la función $f(q)$, $\forall q \in \Gamma$ en el plano (f_n, f_p) , está dentro del polígono que se define intersectando el rectángulo del teorema 3.3.3 con el espacio entre las rectas a 45° separadas del origen la cota mínima $f^{\min} + f_{L\min} - f_{Nn}(\delta^{\max})$, y la cota máxima $f^{\min} + f_{L\max} + f_{Np}(\delta^{\max})$.

La serie de Taylor de $f(q)$ donde $q = \mu^{\min} + \delta$, que fundamenta a la proposición 3.3.2 es la suma de: una parte independiente de δ que es $f(\mu^{\min})$, otra lineal $\nabla f(q)|_{\mu^{\min}} \cdot \delta$ y la función $\Phi(\delta)$ que contiene los términos de orden superior en δ . Es fácil ver que si δ tiende a cero, entonces $\Phi(\delta)$ tiende a cero, y la

parte lineal $\nabla f(q)|_{\mu^{\min}} \cdot \delta$. es mucho mayor que $\Phi(\delta)$. Por otra parte, cuando se aplica la división de variables en k partes iguales, cada componente del vector δ se obtiene mediante $\delta_i \in [0, \frac{q_i^+ - q_i^-}{k}]$, de tal manera que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_i = 0$, implicando, así que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(q) = f^{\min} + f_L(\delta)$. Descomponiendo $f(q)$, f^{\min} y $f_L(\delta)$ en sus partes negativa y positiva, y reagrupando cada una con su semejante se concluye: $\lim_{k \rightarrow \infty} f_n(q) = f_n^{\min} + f_{Ln}(\delta)$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} f_p(q) = f_p^{\min} + f_{Lp}(\delta) \forall q \in \Gamma, \forall \Gamma \subset Q$ quedando demostrado el siguiente hecho.

Hecho 3.3.3. [19] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función con descomposición de signo en Q . Sean: q, δ, Γ de acuerdo a la proposición 3.3.2, donde Γ es generado por división de cada variable en k partes iguales. Entonces: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(q) = f^{\min} + f_L(\delta)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_n(q) = f_n^{\min} + f_{Ln}(\delta)$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} f_p(q) = f_p^{\min} + f_{Lp}(\delta), \forall q \in \Gamma, \forall \Gamma \subset Q$.

El resultado del lema 3.3.2 es mejorado si se emplean las cotas inferior y superior del teorema del polígono 3.3.4 como se muestra en la siguiente sección.

3.4 TEOREMA DE DETERMINACIÓN DE SIGNO MEDIANTE PARTICIÓN DE CAJAS.

Teorema 3.4.1. [19, 20] Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min}, v^{\max} . Entonces la función $f(q)$ es positiva (negativa) en Q si y sólo si existe un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y Cota $\inf \geq c > 0$ para cada caja Γ^i (Cota $\sup \leq c < 0$ para cada caja Γ^i).

La tendencia de la función $f(q)$ a una función lineal al aumentar k como se muestra en el hecho 3.3.3, explica por qué el teorema de determinación de signo mediante partición de Cajas 3.4.1, tiene ventaja sobre el lema 3.3.2 en la determinación de signo de una función; ya que las cotas del teorema 3.4.1 están más cercanas

del mínimo y máximo de la función, permitiendo así obtener un resultado con un número menor de cajas Γ que el necesario en el lema 3.3.2.

Dada la conveniencia de trabajar en la representación en (α, β) , entonces es de utilidad expresar las cotas mínima y máxima del teorema del polígono 3.3.4 y del teorema de determinación de signo mediante partición de cajas 3.4.1 en esta representación como se muestra en el siguiente hecho.

Hecho 3.4.1. [19, 20] *La representación en (α, β) de las cotas mínima y máxima del teorema del polígono 3.3.4 están dadas por:*

$$\alpha_{cota \text{ mín}} = \alpha^{\text{mín}} + \alpha_{L \text{ mín}} + \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\text{máx}}) - \beta_N(\delta^{\text{máx}}))$$

$$\beta_{cota \text{ mín}} = \beta^{\text{mín}} + \beta_{L \text{ mín}} - \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\text{máx}}) - \beta_N(\delta^{\text{máx}}))$$

$$\alpha_{cota \text{ máx}} = \alpha^{\text{mín}} + \alpha_{L \text{ máx}} + \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\text{máx}}) + \beta_N(\delta^{\text{máx}}))$$

$$\beta_{cota \text{ máx}} = \beta^{\text{mín}} + \beta_{L \text{ máx}} + \frac{1}{2}(\alpha_N(\delta^{\text{máx}}) + \beta_N(\delta^{\text{máx}}))$$

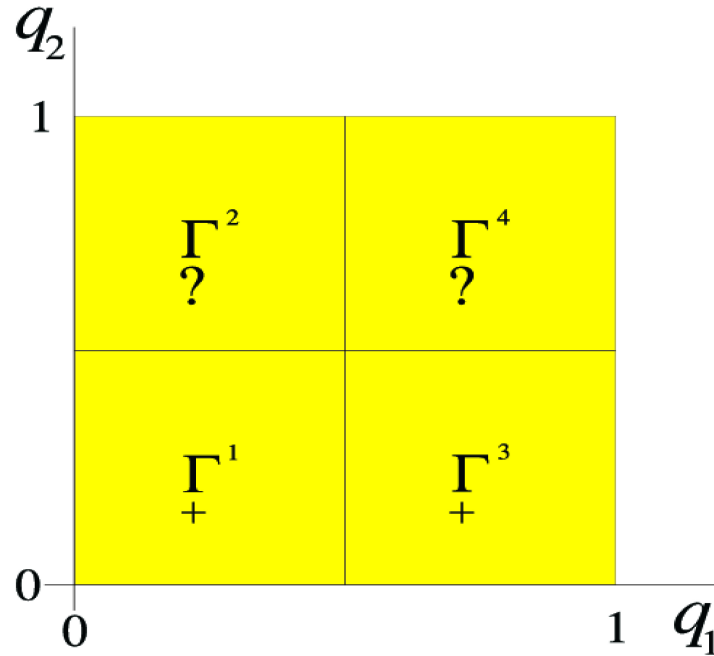


Figura 3.8: Positividad Robusta en cajas Γ^1 y Γ^3 .

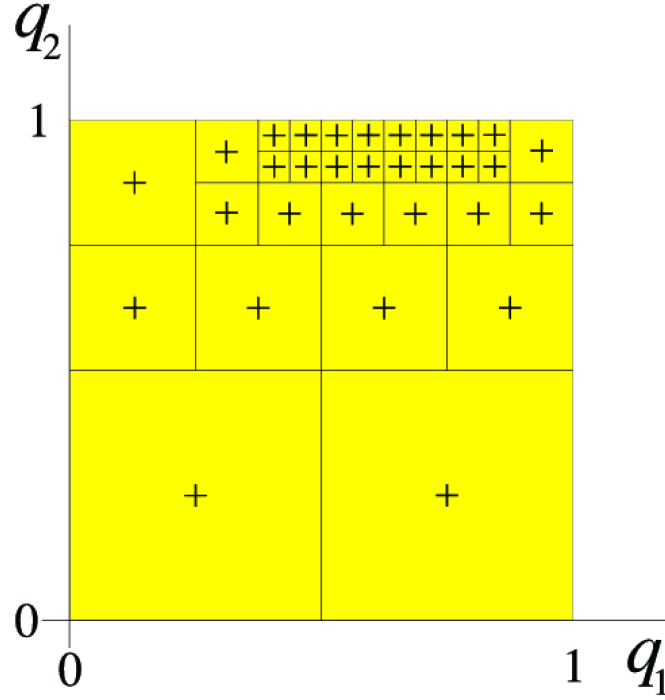


Figura 3.9: Partición de cajas Γ donde la función no cumple positividad robusta.

3.5 VENTAJAS DE DESCOMPOSICIÓN DE SIGNO

El problema de positividad robusta de funciones multivARIABLES polinómicas es considerado un problema NP-hard (non-deterministic polynomial-time hard) en la teoría de complejidad computacional. Debido a la incertidumbre paramétrica el número de operaciones que se deben de realizar aumenta considerablemente para obtener un resultado adecuado.

La solución a problemas NP-hard es complicada y tardada, este tipo de problemas pueden ser de cualquier tipo, no solo en el área de control: problemas de decisión, problemas de búsqueda, o problemas de optimización. La importancia de contar con una herramienta capaz de dar solución a este tipo de problemas es de gran ayuda para distintos enfoques. A continuación se presentan algunas ventajas

y desventajas sobre las herramientas antes mencionadas: Aritmética de Intervalo. Es lo suficientemente potente como para proporcionar demostraciones matemáticas rigurosas, pero el rigor tiene un precio. En particular, aritmética de intervalos puede ser lenta, y a menudo da resultados demasiado pesimistas para cálculos en el mundo real. [17, 26]

Polinomios de Bernstein es una herramienta que puede ser utilizada para encontrar cotas en funciones multivariantes polinómicas sin embargo cuando los coeficientes del polinomio tienen un mayor número de parámetros o de complejidad mayor presenta ciertas desventajas sobre descomposición de signo [24]. La tasa óptima de convergencia para aproximar una función haciendo uso de polinomios de Bernstein es muy lenta, lo cual hace menos atractiva esta herramienta [47]. Descomposición de signo se puede aplicar a varias disciplinas; en el caso de sistemas LTI con incertidumbre paramétrica, esta herramienta matemática se puede aplicar a la controlabilidad robusta, observabilidad robusta o bien al análisis de estabilidad robusta. La transformación de coordenadas a partir de los parámetros físicos a un conjunto de parámetros matemáticos de manera que todos los vectores de los nuevos parámetros estén contenidos en un cono convexo positivo es una de las ventajas principales de esta herramienta y una mejora de resultados.

Descomposición de signo o "sign-definite decomposition" es utilizado por diversos autores en nuevas aplicaciones mapeando el problema original a un problema de positividad robusta de funciones multivariantes polinómicas.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS PRINCIPALES

4.1 INCERTIDUMBRE EN SISTEMAS Y PROCESOS

El estudio de la incertidumbre da lugar a nuevos paradigmas para el diseño de sistemas de control en diversos sistemas y procesos. Se han establecido diversos métodos de análisis como: Aritmética de Intervalos, Polinomios de Bernstein y Descomposición de Signo, así como nuevas ideas y el diseño eficiente de algoritmos capaces de cumplir con requerimientos específicos.

El considerar la presencia de la incertidumbre en el diseño de controladores robustos sin sacrificar el desempeño del sistema es todo un reto, sin embargo es una tarea que debe realizarse para reducir el riesgo y el costo de proyectos en diferentes aplicaciones de la ingeniería. Es necesario comprender el impacto de la incertidumbre paramétrica en el diseño del control y de ese modo dar la robustez necesaria en los procesos de la industria en general.

Un sistema (o su polinomio característico) es llamado caracter γ -estable, si todos los eigenvalores se encuentran en una región específica Γ del plano complejo.

La pregunta básica sobre análisis de robustez es la siguiente: ¿Es la familia de polinomios $P(s, Q)$ estable (o Γ -estable) ? Las pruebas de estabilidad clásicas se

enfocan principalmente en un polinomio específico $p(s, q^1)$ es decir $q = q^1$. Uno puede pensar en repetir la prueba muchas veces para un vector de puntos $q^i \in Q$. Pero de esta forma nunca se estará realmente seguro que no existe un punto inestable dentro de Q . El análisis de robustez es relativamente sencillo para coeficientes intervalo y para el caso afín. Es mucho más complicado para el caso multilineal y polinómico.

4.1.1 TIPOS DE INCERTIDUMBRE

La incertidumbre se puede clasificar en dos grupos:

1. Incertidumbre dinámica (depende de la frecuencia)
2. Incertidumbre paramétrica (real)

La **incertidumbre dinámica** toma en cuenta errores que pueden existir en el modelo o bien dinámicas no modeladas. Usualmente estas dinámicas se encuentran en altas frecuencias. Las perturbaciones dinámicas que pueden ocurrir en diferentes partes del sistema o esos errores en los parámetros en el modelo se pueden englobar en un solo bloque de perturbación o de incertidumbre Δ . Esta representación o tipo de incertidumbre también es conocida como incertidumbre no estructurada.

Para sistemas LTI el bloque Δ puede ser representado por una matriz de función de transferencia desconocida. La incertidumbre no estructurada en un sistema de control puede describirse de diferentes formas, que se enumeran a continuación, donde G_p denota el sistema actual tomando en cuenta las perturbaciones y G_o es la descripción del modelo nominal del sistema físico.

- Perturbación aditiva.
- Perturbación inversa aditiva.
- Perturbación multiplicativa a la entrada.

- Perturbación multiplicativa a la salida.
- Perturbación inversa multiplicativa a la entrada.
- Perturbación inversa multiplicativa a la salida.
- Factorizaciones coprimas

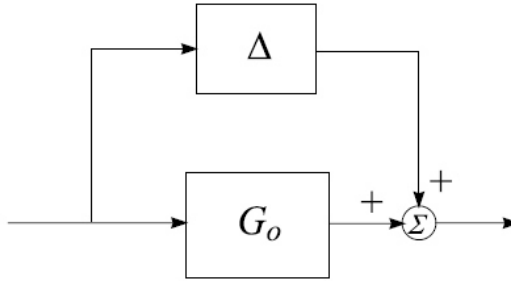


Figura 4.1: Configuración de perturbación aditiva

$$G_p(s) = G_o(s) + \Delta$$

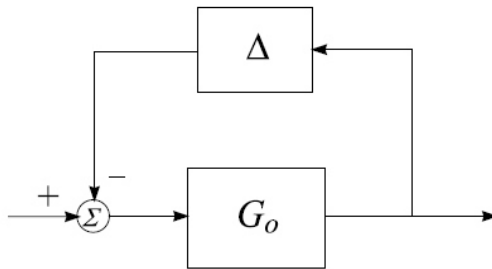


Figura 4.2: Configuración de perturbación inversa aditiva

$$((G_p(s))^{-1} = ((G_o(s))^{-1}(s) + \Delta$$

El estudio de este trabajo de tesis es enfocado en la incertidumbre paramétrica es por eso que solo se muestran dos tipos de configuraciones para la incertidumbre no estructurada.

En la **incertidumbre paramétrica** el orden y la estructura del modelo son conocidos, pero los valores de cada parámetro son inciertos.

En la incertidumbre paramétrica cada parámetro es acotado en alguna región $q_1 \in (q_{1min}, q_{1max})$. La incertidumbre paramétrica es también llamada incertidumbre estructurada.

En la realidad industrial, éste es el tipo de incertidumbre que se presenta ya que no hay un sistema en particular a analizar, sino una familia de sistemas que deben ser analizados debido a que los valores de parámetros físicos no son conocidos, sólo conocemos los límites inferior y superior de cada parámetro que intervienen en cada proceso [1, 6, 9]. El conjunto de parámetros que intervienen en un sistema hace un vector paramétrico, el conjunto de todos los vectores que pueden existir en una forma tal que cada parámetro se mantiene dentro de sus límites inferior y superior se llama una caja de incertidumbre paramétrica. El sistema que estamos estudiando ahora se compone de un número infinito de sistemas, cada sistema corresponde a un vector de parámetros que figuran en el cuadro de incertidumbre paramétrica. Con el fin de probar la estabilidad del sistema LTI con la incertidumbre paramétrica tenemos que demostrar que toda la infinidad de sistemas son estables, esto se llama Estabilidad Robusta Paramétrica.

4.2 ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE CONTROLADORES ROBUSTOS

En años recientes se han desarrollado distintas técnicas para el análisis y diseño de controladores que mantengan robustez a pesar de la incertidumbre paramétrica

que pueda existir en los parámetros del sistema. El reto es grande, ya que el procedimiento de síntesis del controlador es complejo y es necesario que éste pueda ser aplicado con éxito a un gran número de problemas de ingeniería. La presencia de la incertidumbre paramétrica en cada uno de estos problemas complica las cosas considerablemente, y las técnicas de síntesis estándar dejan de ser adecuadas.

Una de las propiedades más importantes de un sistema de control bien diseñado con retroalimentación es su capacidad para llevar a cabo un desempeño satisfactorio a pesar de la incertidumbre en el modelo de la planta o perturbaciones. Esta sección presenta los conceptos fundamentales de la teoría de control robusto y su aplicación en el análisis y síntesis de controladores para sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) con incertidumbre paramétrica.

Siempre hay que comprobar la robustez después de un diseño!

4.3 ALGORITMO CON UN PARÁMETRO DEL CONTROLADOR

Este algoritmo determina las cotas inferior y superior de la ganancia del controlador capaz de dar estabilidad relativa robusta al sistema, es decir que la parte real de las raíces del polinomio característico del lazo cerrado se encuentren ubicadas en una región determinada. Se toma en cuenta solo un parámetro del controlador en donde el sistema presente incertidumbre paramétrica y que pueda aplicarse a diversas aplicaciones. Dos ejemplos mecánicos clásicos son la válvula flotador de la cisterna del aseo y el regulador centrífugo. El sistema de control proporcional es más complejo que un sistema de control encendido-apagado como por ejemplo un termostato interno bi-metálico, pero más sencillo que un sistema de control proporcional-integral-derivativo (PID) que se puede utilizar para controlar la velocidad de un automóvil. El sistema de control tipo encendido-apagado es adecuado en situaciones

donde el sistema en general tiene un tiempo de respuesta relativamente largo, pero dará lugar a un comportamiento inestable si el sistema que está siendo controlado tiene un tiempo de respuesta breve. El control proporcional resuelve este problema de comportamiento mediante la modulación de la salida del dispositivo de control, como por ejemplo con una válvula cuyo paso se varia en forma continua.

La descripción del algoritmo es como sigue: Primeramente se requiere determinar un valor inicial de ganancia K^* , definir un valor $n > 1$, n es un valor que será un multiplo del valor inicial y establecerá los intervalos a analizar a lo largo del algoritmo. Enseguida hay que definir una tolerancia ε . La ganancia K^* debe ser tal que el sistema sea robustamente estable y el valor de tolerancia ε que es con la cual el algoritmo detiene su proceso de búsqueda de los intervalos de ganancia con los que se alcanzarán las cotas mínima o máxima estimadas.

El algoritmo se compone de dos partes:

- I. Se obtiene el intervalo $[K^*, K_{Me}]$.
- II. Se obtiene el intervalo $[K_{me}, K^*]$.

La parte I donde se obtiene la cota máxima estimada tiene dos etapas, la primera Ia es una búsqueda creciente de intervalo de ganancia y la parte Ib es una búsqueda decreciente de intervalo de ganancia. En la parte creciente Ia, el primer segmento de ganancia para analizar estabilidad relativa robusta es $[K^*, nK^*]$, en caso que este primer segmento satisfaga la estabilidad relativa robusta del sistema, la cota momentánea máxima K_i será $K_1 = nK^*$ ya que i es igual a uno por ser la primera iteración. El siguiente segmento será $[nK^*, n^2K^*]$ y así sucesivamente hasta llegar a un segmento $[n^p K^*, n^{p+1} K^*]$ en donde no satisface estabilidad relativa robusta, debe de notarse que el valor de cota momentánea máxima en este punto es el último valor logrado que será $K_i = n^p K^*$. Entonces, el siguiente segmento de ganancia a analizar es $[n^p K^*, \frac{n^p + n^{p+1}}{2} K^*]$ que realmente es la mitad inferior del segmento de donde fue obtenido, si éste satisface estabilidad relativa robusta entonces el siguiente segmento a analizar es $[\frac{n^p + n^{p+1}}{2} K^*, n^{p+1} K^*]$. De lo contrario el segmento inferior es dividido de la misma manera en un segmento inferior y un segmento superior aplicándoles el

mismo criterio. Este procedimiento se sigue aplicando en forma sucesiva hasta llegar a el punto donde el segmento de ganancia a analizar es menor que la tolerancia preestablecida, en este punto el algoritmo detiene la búsqueda de la cota máxima estimada tomando ésta el valor más alto de la cota momentánea máxima logrado.

El procedimiento anterior puede ser ejemplificado de la siguiente manera: Supongamos que la tolerancia estipulada es $\varepsilon = 0.25$ y el valor de $n = 2$, se tiene un valor inicial de ganancia $K^* = 2$ para el cual el sistema es robustamente estable en cierta región predeterminada, es decir, que la parte real de las raíces se encuentren entre $-a$ y $-b$. Se inicia la búsqueda de la cota máxima estimada K_{Me} en el intervalo $[2, 4]$ supongamos que se satisface estabilidad relativa robusta, por lo que $K_i = K_1 = 4$ el siguiente intervalo a analizar es $[4, 8]$, supongamos que no satisface estabilidad; entonces el siguiente intervalo a analizar es de $[4, 6]$, suponiendo que satisface estabilidad robusta la $K_i = 6$ y ahora el siguiente intervalo a analizar es $[6, 7]$. Cuando el segmento a analizar es más pequeño que el ε dado, ya no tiene caso continuar con la búsqueda de la cota máxima estimada.

La parte II donde se obtiene la cota mínima estimada es una búsqueda decreciente de intervalo de ganancia, en la cual se emplea un valor de $n = 0.5$, el primer segmento de ganancia para analizar estabilidad relativa robusta es $[0, K^*]$, si se satisface estabilidad relativa robusta el algoritmo termina y $K_{me} = 0$, de lo contrario el siguiente segmento a analizar es $[n(0 + K^*), K^*]$, por simplicidad $n(0 + K^*)$ se anotará como nK^* , supongamos que si se satisface estabilidad relativa robusta entonces la cota momentánea mínima $K_i = K_2 = nK^*$ donde $i = 2$ ya que es la segunda iteración y el siguiente segmento a analizar es $[n^2K^*, nK^*]$, si se satisface estabilidad relativa robusta entonces la cota momentánea mínima $K_i = K_3 = n^2K^*$ donde $i = 3$ ya que es la tercera iteración y el siguiente segmento a analizar es $[n^3K^*, n^2K^*]$, supongamos que no se satisface estabilidad relativa robusta entonces el siguiente segmento a analizar es $[\frac{n^3 + n^2}{2}K^*, n^2K^*]$ y así sucesivamente hasta llegar a un segmento a analizar menor a una tolerancia preestablecida, tomando como cota mínima estimada K_{me} la última cota momentánea mínima K_i .

Para ejemplificar lo explicado arriba es conveniente continuar con el ejemplo anterior: Se inicia la búsqueda de la cota mínima estimada K_{me} en el intervalo $[0, 2]$ supongamos que no se satisface estabilidad robusta, por lo que el siguiente segmento a analizar es $[1, 2]$, ahora supongamos que si se satisface estabilidad relativa robusta, entonces la cota momentánea mínima es $K_i = K_1 = 1$ y el nuevo intervalo a analizar es $[0.5, 1]$, suponiendo que no se satisface estabilidad relativa robusta, el nuevo intervalo a analizar es $[0.75, 1]$ y así sucesivamente hasta que el segmento a analizar sea más pequeño que el ε dado y la cota mínima estimada será igual a la última cota momentánea mínima calculada. Por falta de espacio no es posible incluir el diagrama de flujo del algoritmo.

4.3.1 EJEMPLO ILUSTRATIVO

Planteamiento del problema. Para ilustrar la implementación del algoritmo anterior que determina las cotas de los parámetros del controlador que satisfacen estabilidad relativa robusta, es presentado un ejemplo de servomecanismo tomado de [39]. El ejemplo original trata de un servomecanismo posicional que incluye un amplificador con ganancia de 10 que recibe el error entre posición deseada y posición real y entrega el voltaje de campo del motor. En el ejemplo propuesto la ganancia del amplificador es la ganancia del controlador del cual se encontrarán sus cotas superior e inferior, el resto de los parámetros son tomados ahora con una incertidumbre de $\pm 5\%$. El diagrama de bloques del sistema se muestra a continuación:

La ganancia en lazo cerrado del sistema queda de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{K_p K_1 K_m n}{T_f T_m s^3 + (T_f + T_m) s^2 + s + K_1 K_m K_p n}$$

Donde:

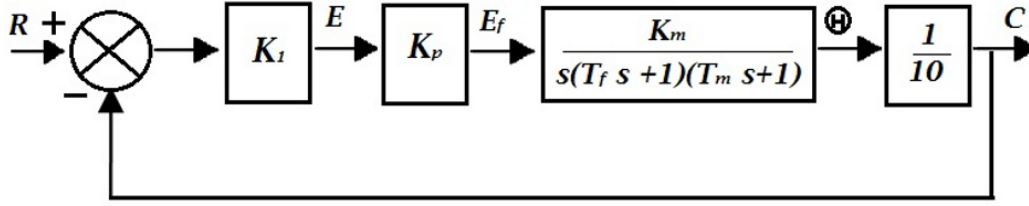


Figura 4.3: Diagrama de bloques del servomecanismo de posición.

- K_p es la ganancia del controlador (proporcional)
- K_m es la constante de ganancia del motor.
- K_1 es la ganancia del potenciómetro detector de error.
- T_m es la constante de tiempo del motor.
- T_f es la constante de tiempo del generador.

Los parámetros del sistema con incertidumbre son como sigue: $K_m \in [1.1875, 1.3125] \text{ rad/volt} \cdot \text{seg}$, $K_1 \in [7.257465405, 8.021409131] \text{ volts/rad}$, $T_f \in [0.0475, 0.0525] \text{ seg}$, $T_m \in [0.19, 0.21] \text{ seg}$. además la relación de engranes está dada por $n = 0.1$.

En este ejemplo se trata de encontrar las cotas estimadas con una tolerancia de 0.01 de la ganancia del controlador K_p de tal manera que la parte real de las raíces del polinomio característico de lazo cerrado se encuentren dentro de una región determinada por el segmento $[-25, -1]$.

Solución del problema

En general el problema se resolverá de la siguiente manera:

1. El algoritmo requiere revisar la estabilidad robusta relativa en un segmento de ganancia del controlador.

2. El teorema 3.3.2 mapea el problema de estabilidad robusta relativa a un problema de estabilidad robusta de dos polinomios
3. El teorema 3.3.1 mapea el problema de estabilidad robusta de cada uno de los polinomios mencionados a un problema de positividad robusta de funciones multivariantes polinómicas dependientes de los parámetros con incertidumbre
4. La herramienta descomposición de signo resuelve en condiciones necesarias y suficientes el problema de positividad robusta mencionado y de esa manera queda resuelta dicha etapa del algoritmo.

En la nomenclatura de control robusto paramétrico se acostumbra identificar los parámetros físicos por \hat{q}_i así que: $\hat{q}_1 = K_m$, $\hat{q}_2 = K_1$, $\hat{q}_3 = T_f$, $\hat{q}_4 = T_m$ y $\hat{q}_5 = K_p$. De tal forma que el polinomio característico en lazo cerrado del caso a resolver queda de la siguiente manera:

$$p(s, \hat{q}) = C_3(\hat{q})s^3 + C_2(\hat{q})s^2 + C_1(\hat{q})s + C_0(\hat{q}), \text{ donde:}$$

$$C_3(\hat{q}) = \hat{q}_3\hat{q}_4$$

$$C_2(\hat{q}) = \hat{q}_3 + \hat{q}_4$$

$$C_1(\hat{q}) = 1$$

$$C_0(\hat{q}) = 0.1\hat{q}_1\hat{q}_2\hat{q}_5$$

Dado que el problema se resolverá mediante teorema de estabilidad relativa 2.3.2 en donde tiene que analizarse la estabilidad robusta de los polinomios $p(s - a)$ y $p(-s - b)$ donde $a = 1$ y $b = 25$, esto significa que la parte real de las raíces se encuentre en el segmento $[-25, -1]$. Entonces la estabilidad robusta de cada polinomio $p(s - a)$ y $p(-s - b)$ será analizado mediante el teorema 3.3.1 aplicando descomposición de signo para probar la positividad robusta de los elementos $e_{i,1}$ ya que si cada uno de los elementos $e_{i,1}$ es robustamente positivo, entonces toda la columna σ será positiva y el sistema del polinomio analizado será robustamente estable.

En la aplicación de descomposición de signo es necesario normalizar los parámetros \hat{q}_i de tal manera que toda q_i sea no negativa y es mucho más cómodo si se

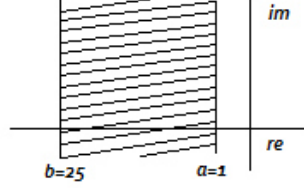


Figura 4.4: Región de estabilidad preestablecida

convierte en un nuevo parámetro $q_i \in [0, 1]$. Tomando en cuenta que $K_m \in [K_m^-, K_m^+]$ $rad/volt \cdot seg$, $K_1 \in [K_1^-, K_1^+]$ $volts/rad$, $T_f \in [T_f^-, T_f^+]$ seg , $T_m \in [T_m^-, T_m^+]$ seg .

Donde el superíndice "menos" indica el límite inferior del parámetro físico y el superíndice "más" indica el límite superior del parámetro físico.

Entonces la conversión de \hat{q} a q se realiza de la siguiente manera:

$$\hat{q}_1 = K_m^- + q_1(K_m^+ - K_m^-), \hat{q}_2 = K_1^- + q_2(K_1^+ - K_1^-), \hat{q}_3 = T_f^- + q_3(T_f^+ - T_f^-), \\ \hat{q}_4 = T_m^- + q_4(T_m^+ - T_m^-), \text{ obteniéndose así:}$$

$$p(s - a, q) = C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q), \text{ donde:}$$

$$C_3 = 0.00095q_3 + 0.00095q_4 + 0.0001q_3q_4 + 9.025 \times 10^{-3}$$

$$C_2 = 0.00215q_3 + 0.01715q_4 - 0.0003q_3q_4 + 0.21043$$

$$C_1 = 0.0003q_3q_4 - 0.03715q_4 - 0.00715q_3 + 0.55208$$

$$C_0 = 0.00405q_3 + 0.01905q_4 + 0.86182q_5 - 0.0001q_3q_4$$

$$+ 9.0718 \times 10^{-2}q_1q_5 + 9.0718 \times 10^{-2}q_2q_5$$

$$+ 9.5493 \times 10^{-3}q_1q_2q_5 - 0.77153$$

$p(-s - b, q) = C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q)$ donde:

$$C_3 = 0.00095q_3 + 0.00095q_4 + 0.0001q_3q_4 + 9.02510^{-3}$$

$$C_2 = 0.06625q_3 + 0.05125q_4 + 0.0075q_3q_4 + 0.43938$$

$$C_1 = 1.5313q_3 + 0.78125q_4 + 0.1875q_3q_4 + 6.0469$$

$$C_0 = 11.719q_3 + 2.3438q_4 - 0.86182q_5 + 1.5625q_3q_4$$

$$- 9.071810^{-2}q_1q_5 - 9.071810^{-2}q_2q_5$$

$$- 9.549310^{-3}q_1q_2q_5 + 17.578$$

Para aplicar el algoritmo propuesto, primeramente se encuentra un valor de q_5 , la ganancia K^* del controlador, que hace robustamente estables a los polinomios $p(s - a, q)$ y $p(-s - b, q)$, que en este caso $q_5 = 3$ satisface esta necesidad. Posteriormente se define la tolerancia explicada en la sección III, en este caso se tomará una tolerancia de 0.01 y $n = 2$ se obtienen los resultados mostrados en la tablas I y II.

Para la obtención de la cota máxima estimada de $p(s - a)$ el intervalo inicial es $[3, 6]$ ya que el el valor de $n = 2$, como la prueba de estabilidad robusta se satisface el siguiente intervalo se toma de $[6, 12]$ para este caso la prueba de estabilidad robusta es negativa y como el intervalo $[3, 6]$ si cumplió con la prueba no tiene sentido el tomar un nuevo intervalo que inicie con un valor 3 por lo que el nuevo intervalo inicia en 6 hasta el promedio del intervalo que no paso la prueba de estabilidad robusta es decir $[6, 9]$ éste nuevo intervalo si satisface estabilidad robusta por lo que el siguiente intervalo a analizar será iniciando con un valor de 9 y tomando el promedio entre 9 y 12 es decir $[9, 10.5]$ y así sucesivamente hasta encontrar la cota máxima estimada, de igual forma se calcula la cota máxima estimada de $p(-s - b)$.

Para la obtención de la cota mínima estimada de $p(s - a)$ el intervalo inicial es $[0, 3]$, como la prueba de estabilidad robusta no se satisface el valor inicial del siguiente intervalo será el promedio del intervalo anterior es decir $[1.5, 3]$ para este caso la prueba de estabilidad robusta si se satisface por lo que no tiene sentido que el valor final del intervalo sea 3 se sustituye por 1.5 y el valor inicial del intervalo es el promedio entre 0 y 1.5 es decir $[0.75, 1.5]$ este procedimiento continúa hasta

encontrar la cota mínima estimada, de igual forma se calcula la cota mínima estimada de $p(-s - b)$

Donde la columna *E.R.* significa Estabilidad Relativa, el símbolo "✓" significa que el signo en todos los renglones de la columna σ son positivos, y el sistema tiene estabilidad relativa robusta en el intervalo de $q5$ analizado y el símbolo "x" indica que para ese intervalo de ganancia no se satisface estabilidad relativa robusta.

p(s-a)			p(s-a)		
Cota máxima estimada q_5^+			Cota mínima estimada q_5^-		
No.	q_5	E.R.	No.	q_5	E.R.
1	3-6	✓	1	0-3	x
2	6-12	x	2	1.5-3	✓
3	6-9	✓	3	0.75-1.5	x
4	9-10.5	✓	4	1.125-1.5	✓
6	10.5- 10.875	x	6	0.8438-0.9375	x
7	10.5- 10.687	✓	7	0.8906-0.9375	x
8	10.68- 10.78	x	8	0.9141-0.9375	✓
9	10.68- 10.73	✓	9	0.9023-0.9141	✓
10	10.734-10.757	x	10	0.8965-0.9023	✓
11	10.734-10.746	✓	11	0.8936-0.8965	✓
12	10.746-10.752	✓			
13	10.752-10.754	x			

Tabla 4.1: Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para $p(s-a)$ de un servomecanismo posicional.

Dado que el segmento de q_5 analizado en la iteración 13 de la cota máxima y 11 de la cota mínima para el polinomio $p(s-a)$ son menores que la tolerancia ε especificada, el algoritmo finaliza y el rango de q_5 que estabiliza el sistema para $p(s-a)$ es: $0.8965 \leq q_5 \leq 10.7520$

p(-s-b)			p(-s-b)		
Cota máxima estimada del controlador q_5^+			Cota mínima estimada del controlador q_5^-		
No.	q_5	E.R.	No.	q_5	E.R.
1	3-6	✓	1	0-3	✓
2	6-12	✓			
3	12-24	✓			
4	24-48	x			
5	24-36	x			
6	24-30	x			
7	24-27	x			
8	24-25.5	x			
9	24-24.75	x			
10	24-24.375	x			
11	24- 24.1875	x			
12	24- 24.0938	x			
13	24- 24.0496	x			
14	24- 24.0234	x			
15	24- 24.0117	x			
16	24- 24.0059	x			

Tabla 4.2: Cálculo de cota mínima y máxima estimada de la ganancia del controlador para p(-s-b) de un servomecanismo posicional

Dado que el segmento de q_5 analizado en la iteración 16 de la cota máxima y 1 de la cota mínima para el polinomio $p(-s - b)$ son menores que la tolerancia ε especificada, el algoritmo finaliza y el rango de q_5 que estabiliza el sistema para $p(-s - b)$ es: $0 \leq q_5 \leq 24$.

Las cotas del parámetro q_5 que hacen que el sistema en lazo cerrado sea robustamente estable manteniendo las raíces en el segmento $[-25, -1]$ están contenidas en $q_5 \in [0.8965, 10.7520]$

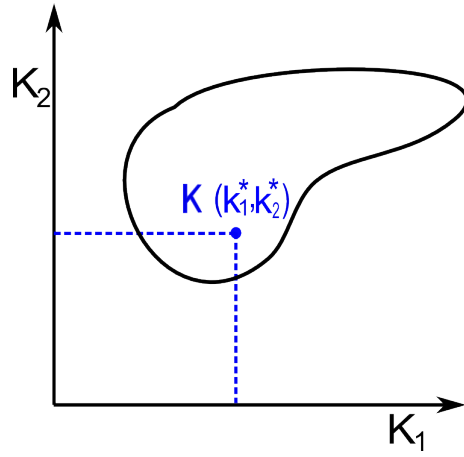
4.4 ALGORITMO CON DOS PARÁMETROS DEL CONTROLADOR

A continuación se presenta una extensión del algoritmo presentado en la sección 4.3. La descripción del algoritmo es como sigue: Se parte un punto específico de dos parámetros del controlador $K^*(k_1^*, k_2^*)$ que satisfaga estabilidad robusta relativa, que llamaremos *Punto de Partida de Análisis*. El algoritmo hace la búsqueda de la región en la cual se satisface estabilidad robusta relativa en dos partes (hacia la derecha y hacia la izquierda de K^*). La descripción solo se hará hacia la derecha en los siguientes pasos: (ya que se utiliza la misma lógica para ambos sentidos)

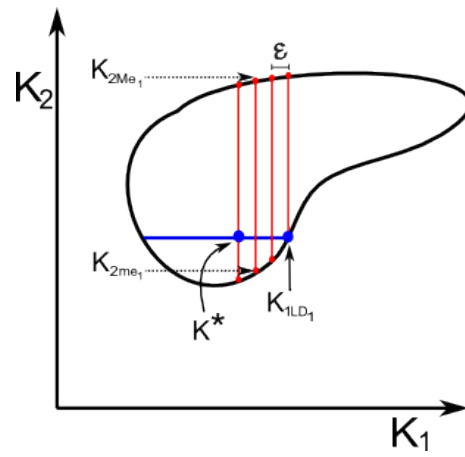
1. Se propone una medida inicial de retícula a analizar ε y se define la tolerancia α con la finaliza el algoritmo.
2. Partiendo de un $K^*(k_1^*, k_2^*)$ que le da estabilidad robusta relativa al sistema, mediante el algoritmo [36] se hace la búsqueda de la primer cota lateral derecha $k_{1_{LD1}}$, para la cual el sistema es robustamente estable en el segmento $[k_1^*, k_{1_{LD1}}]$ manteniendo $k_2 = k_2^*$.
3. Con el intervalo $[k_1^*, k_{1_{LD1}}]$ y el valor propuesto de ε se obtiene el número inicial

- ν_1 de intervalos a analizar, ν_1 es el entero inmediato mayor a $\frac{(k_{1LD1} - k_1^*)}{\varepsilon}$
4. Calcular el ancho de retícula a analizar $\varepsilon_1 = \frac{(k_{1LD1} - k_1^*)}{\nu_1}$
 5. Analizar la satisfacción de tolerancia. Si $\varepsilon_1 \leq \alpha\varepsilon$ ir al paso 9 de lo contrario continuar con el paso 6.
 6. Calcular los ν_1 nuevos “puntos de partida de análisis” $(k_1^* + n\varepsilon_1, k_2^*) \forall n = 0, 1, 2, \dots, \nu_1$. Obteniendo así $\{K_1^*(k_{11}^*, k_{12}^*), K_2^*(k_{21}^*, k_{22}^*), \dots, K_{\nu_1}^*(k_{\nu_11}^*, k_{\nu_12}^*)\}$
 7. Para cada nuevo punto de partida de análisis, manteniendo constante k_{i1}^* se obtienen las cotas mínima y máxima estimadas para el parámetro k_{i2}^* : k_{i2me} y k_{i2Me} respectivamente. Dichas cotas se obtienen mediante el algoritmo descrito en la sección 4.3, (Ver figura 2).
 8. Regresar al paso 2 calculando el punto de partida de análisis $K^*(k_1^*, k_2^*)$ de la siguiente manera. $k_1^* = k_{\nu_11}^*$, $k_2^* = \frac{k_{\nu_12me} + k_{\nu_12Me}}{2}$, (Ver figura 3)
 9. Analizar la estabilidad robusta relativa en el conjunto de cajas rectangulares con lados paralelos a los ejes K_1 y K_2 con vertices A_i, B_i, C_i, D_i definidos de la siguiente manera. $k_{Ai1} = k_{i1}^*$, $k_{Ai2} = \max\{k_{i2me}, k_{(i+1)2me}\}$; $k_{Bi1} = k_{(i+1)1}^*$, $k_{Bi2} = k_{Ai2}$; $k_{Ci1} = k_{Bi1}$, $k_{Ci2} = \min\{k_{i2Me}, k_{(i+1)2Me}\}$; $k_{Di1} = k_{Ai1}$, $k_{Di2} = k_{Ci2}$, (Ver figura 4).
 10. Aplicar “partición de cajas” a cada caja del paso anterior que no satisfaga las condiciones de estabilidad. Cada una de estas cajas se particiona equidistantemente en cuatro subcajas, a cada una se le aplica el análisis de estabilidad robusta relativa. El procedimiento de partición se aplica iterativamente en cada subcaja que no satisfaga las condiciones de estabilidad. El procedimiento termina cuando el ancho o alto de la subcaja a analizar es menor o igual a α, ε (Ver figura 5).

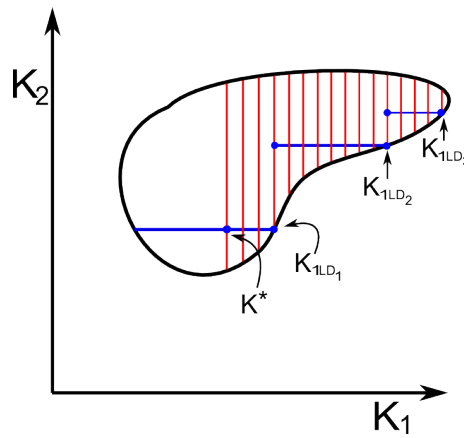
Nota: La figura 6 muestra que para mayor precisión de la región de estabilidad es necesario mayor número de particiones y por lo tanto mayor número de subcajas a analizar; ya que nos enfrentamos a un problema no convexo.



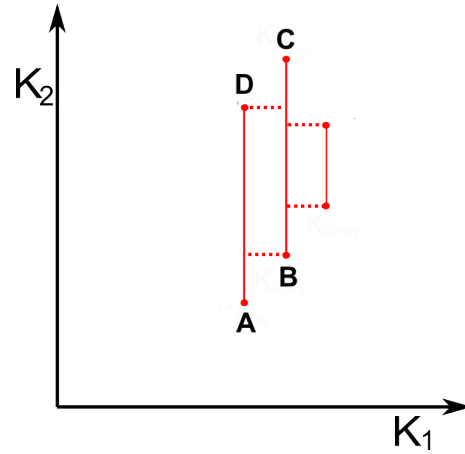
(a) Fig. 1



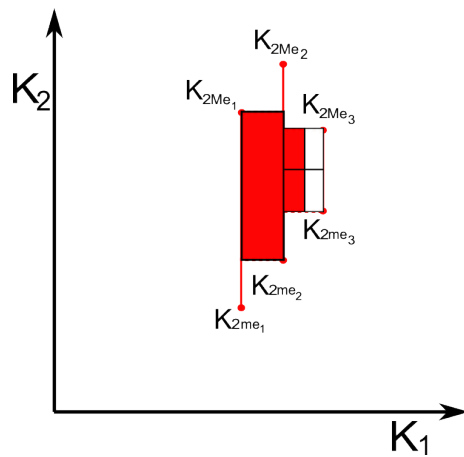
(b) Fig. 2



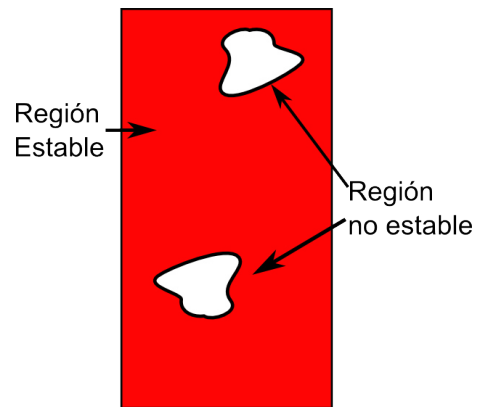
(c) Fig. 3



(d) Fig. 4



(e) Fig. 5



(f) Fig. 6

Figura 4.5: Descripción gráfica del algoritmo de dos parámetros

4.4.1 EJEMPLO ILUSTRATIVO

Considere el siguiente sistema con incertidumbre paramétrica, en cascada con un controlador PI y retroalimentación unitaria:

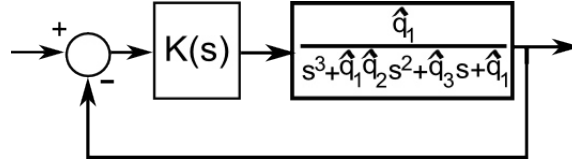


Figura 4.6: Diagrama de bloques del sistema con incertidumbre y controlador con retroalimentación unitaria

Donde:

$$K(s) = (K_p + \frac{K_i}{s}) = (\hat{q}_4 + \frac{\hat{q}_5}{s})$$

El polinomio característico en lazo cerrado queda de la siguiente forma:

$$p(s, \hat{q}) = s^4 + \hat{q}_1 \hat{q}_2 s^3 + \hat{q}_3 s^2 + (\hat{q}_1 + \hat{q}_1 \hat{q}_4) s + \hat{q}_1 \hat{q}_5 \quad (4.1)$$

Los parámetros del sistema con incertidumbre son como sigue: $q_1 \in [1.9, 2.1]$ $q_2 \in [2.37, 2.62]$ $q_3 \in [4.75, 5.25]$. Se desea encontrar las cotas estimadas de la ganancia del controlador K^* de tal manera que la parte real de las raíces del polinomio característico en lazo cerrado se encuentren dentro de $[-5, -1]$. Para conseguir esto, se hace uso del teorema de estabilidad relativa [22] en donde se analiza la positividad robusta de dos polinomios $p(s - a, q)$ y $p(-s - b, q)$, donde $a = 0.1$ y $b = 5$. Mediante el criterio de estabilidad [21] se obtienen dos tablas correspondientes a cada polinomio y mediante “descomposición de signo” se analiza la positividad robusta de los elementos e_i de cada tabla, si y solo si todos los elementos son positivos entonces el sistema del polinomio analizado será robustamente estable. Para poder hacer uso de la herramienta descomposición de signo es necesario normalizar los parámetros \hat{q}_i de tal manera que toda q_i sea no negativa y es mucho más cómodo si se convierte

en un nuevo parámetro $q_i \in [0, 1]$. Los coeficientes de la tabla con los parámetros normalizados quedan de la siguiente forma:

$$p(s - a, q) = C_4(q)s^4 + C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0$$

$$C_4(q) = 1$$

$$C_3(q) = 0.475q_1 + 0.475q_2 + 0.05q_1q_2 + 4.1125$$

$$C_2(q) = 0.5q_3 - 0.1425q_2 - 0.1425q_1 - 0.015q_1q_2 + 3.4563$$

$$C_1(q) = 0.21425q_1 + 0.01425q_2 - 0.1q_3 + 1.9q_4 + 0.2q_1q_4 + 0.0015q_1q_2 + 1.0814$$

$$C_0(q) = 0.005q_3 - 0.0004754q_2 - 0.020475q_1 - 0.19q_4 + 1.9q_5 - 0.00005q_1q_2 - 0.02q_1q_4 \\ + 0.2q_1q_5 - 0.14691$$

$$e_{3,1}(q) = 0.841\,46q_1 + 1.041\,5q_2 + 2.156\,3q_3 - 1.9q_4 - 1.377\,5 \times 10^{-2}q_1q_2^2 - 1.377\,5 \times 10^{-2}q_1^2q_2 \\ - 6.768\,8 \times 10^{-2}q_1^2 - 6.768\,8 \times 10^{-2}q_2^2 - 0.000\,7q_1^2q_2^2 - 2.163\,5 \times 10^{-2}q_1q_2 + \\ 0.237\,5q_1q_3 - 0.2q_1q_4 + 0.237\,5q_2q_3 + 0.025\,q_1q_2q_3 + 13.133$$

(4.2)

$$\begin{aligned}
e_{3,2}(q) = & 2.0563 \times 10^{-2} q_3 - 7.1737 \times 10^{-2} q_2 - 0.15399 q_1 - 0.78138 q_4 + 7.8138 q_5 - \\
& 4.752 \times 10^{-5} q_1 q_2^2 - 1.0475 \times 10^{-3} q_1^2 q_2 - 0.0095 q_1^2 q_4 + 0.095 q_1^2 q_5 - 9.7256 \times 10^{-3} q_1^2 - \\
& 2.2582 \times 10^{-4} q_2^2 - 2.5 \times 10^{-6} q_1^2 q_2^2 - 1.7503 \times 10^{-2} q_1 q_2 + 2.375 \times 10^{-3} q_1 q_3 - \\
& 0.1725 q_1 q_4 + 2.375 \times 10^{-3} q_2 q_3 + 1.725 q_1 q_5 - 0.09025 q_2 q_4 + 0.9025 q_2 q_5 - 0.001 q_1^2 q_2 q_4 + \\
& 0.01 q_1^2 q_2 q_5 + 0.00025 q_1 q_2 q_3 - 0.019 q_1 q_2 q_4 + 0.19 q_1 q_2 q_5 - 0.60417 \\
e_{4,1}(q) = & 4.6440 q_1 + 1.8954 q_2 + 0.93396 q_3 + 26.111 q_4 - 32.134 q_5 - 1.5941 \times 10^{-2} q_1 q_2^2 + \\
& 5.7070 \times 10^{-3} q_1^2 q_2 - 2.6396 \times 10^{-4} q_1 q_2^3 - 0.02375 q_1 q_3^2 + 5.6525 \times 10^{-2} q_1^2 q_3 - \\
& 2.0690 \times 10^{-3} q_1^3 q_2 - 0.76 q_1 q_4^2 - 0.02375 q_2 q_3^2 + 0.11784 q_1^2 q_4 + 9.0251 \times 10^{-3} q_2^2 q_3 - \\
& 1.2101 q_1^2 q_5 - 9.0251 \times 10^{-3} q_1^3 q_4 - 8.5738 \times 10^{-2} q_2^2 q_4 - 4.5125 \times 10^{-2} q_1^3 q_5 - \\
& 0.42869 q_2^2 q_5 + 0.22023 q_1^2 - 9.8825 \times 10^{-3} q_1^3 - 2.3353 \times 10^{-2} q_2^2 - 8.5729 \times 10^{-4} q_2^3 - \\
& 0.21563 q_3^2 - 3.61 q_4^2 - 2.5315 \times 10^{-3} q_1^2 q_2^2 - 2.7074 \times 10^{-5} q_1^2 q_2^3 - 1.1708 \times 10^{-4} q_1^3 q_2^2 - \\
& 0.04 q_1^2 q_4^2 - 9.25 \times 10^{-7} q_1^3 q_2^3 + 0.44085 q_1 q_2 + 0.61514 q_1 q_3 + 4.6826 q_1 q_4 + 0.16388 q_2 q_3 - \\
& 10.806 q_1 q_5 + 2.6941 q_2 q_4 - 7.4231 q_2 q_5 + 4.2870 q_3 q_4 - 0.0025 q_1 q_2 q_3^2 + \\
& 1.8525 \times 10^{-3} q_1 q_2^2 q_3 + 6.8525 \times 10^{-3} q_1^2 q_2 q_3 - 2.6173 \times 10^{-2} q_1 q_2^2 q_4 - \\
& 4.5245 \times 10^{-3} q_1^2 q_2 q_4 - 0.13538 q_1 q_2^2 q_5 - 0.26275 q_1^2 q_2 q_5 + 0.0475 q_1^2 q_3 q_4 - \\
& 1.805 \times 10^{-3} q_1^3 q_2 q_4 - 0.0095 q_1^3 q_2 q_5 + 9.5 \times 10^{-5} q_1^2 q_2^2 q_3 - 0.00266 q_1^2 q_2^2 q_4 - \\
& 0.01425 q_1^2 q_2^2 q_5 - 0.00009 q_1^3 q_2^2 q_4 - 0.0005 q_1^3 q_2^2 q_5 + 8.2389 \times 10^{-2} q_1 q_2 q_3 + \\
& 0.40351 q_1 q_2 q_4 - 2.4201 q_1 q_2 q_5 + 156.3 q_3 - 1.9 q_4 - 0.01425 q_1 q_2^2 - 0.01425 q_1^2 q_2 - \\
& 6.7688 \times 10^{-2} q_1^2 - 6.7688 \times 10^{-2} q_2^2 - 0.00075 q_1^2 q_2^2 - 2.5748 \times 10^{-2} q_1 q_2 + \\
& 0.2375 q_1 q_3 - 0.2 q_1 q_4 + 0.2375 q_2 q_3 + 0.025 q_1 q_2 q_3 + 13.133
\end{aligned}$$

$$p(-s - b, q) = C_4(q)s^4 + C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q)$$

No es necesario analizar la positividad robusta del coeficiente $e_{5,1}$, basta con que sean robustamente positivos los coeficientes $e_{3,2}$ y $e_{4,1}$; ya que $e_{5,1}$ se obtiene de la multiplicación de ambos. Es aplicado el algoritmo presentado partiendo de un $K^* = [0.6, 2]$ y $\nu = 20$. A continuación se presenta la región que es robustamente estable para cada polinomio $p(s - a, q)$ y $p(-s - b, q)$.

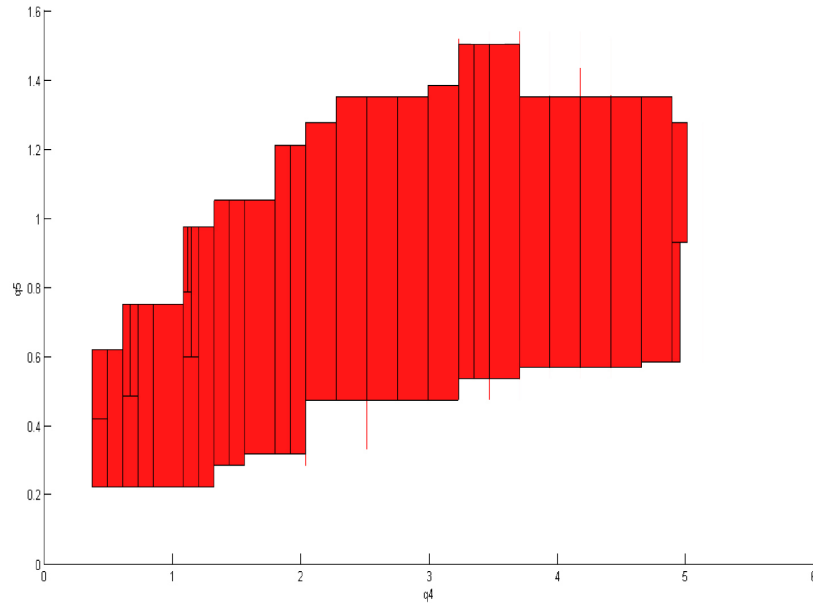


Figura 4.7: Región de estabilidad del sistema para el polinomio $p(s - a, q)$

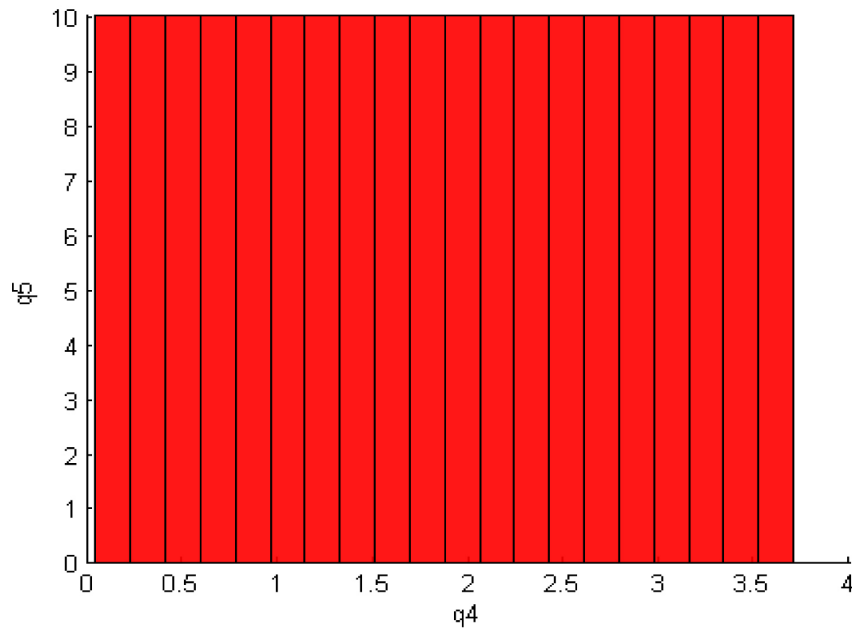


Figura 4.8: Región de estabilidad del sistema para el polinomio $p(-s - b, q)$

La región de estabilidad es la intersección de ambas regiones. Dicha intersección indica los valores de k_1 y k_2 que hacen que el sistema en lazo cerrado sea robustamente estable manteniendo la parte real de las raíces en el segmento $[-5, -0.1]$

4.5 ALGORITMO CON TRES PARÁMETROS DEL CONTROLADOR

Enseguida se presenta el funcionamiento de un algoritmo capaz de establecer los valores adecuados para tres parámetros del controlador que satisface estabilidad robusta a sistemas LTI con incertidumbre paramétrica. La aplicación de este algoritmo es de gran utilidad para controladores del tipo PID teniendo respuesta rápida, menos oscilaciones y sencilla sintonización de los parámetros a pesar de la incertidumbre paramétrica que se presente.

Los pasos que describen el algoritmo de tres parámetros del controlador inician de manera sistemática como el algoritmo de dos parámetros agregando algunos pasos antes de finalizar que permiten el calculo de la región del conjunto de controladores que estabilizan el sistema, dichos pasos se mencionan a continuación:

1. Se inicia con una medida de retícula a analizar ε además una tolerancia α con la que el algoritmo finaliza.
2. Se parte de un $K^*(k_1^*, k_2^*)$ en la que el sistema muestra estabilidad robusta relativa, haciendo uso de el algoritmo [36] se inicia la búsqueda de la primer cota lateral derecha k_{1LD_1} , para la cual el sistema es robustamente estable en el segmento $[k_1^*, k_{1LD_1}]$ manteniendo $k_2 = k_2^*$ y $k_3 = k_3^*$.
3. Con el intervalo $[k_1^*, k_{1LD_1}]$ y el valor propuesto de ε se obtiene el número inicial ν_1 de intervalos a analizar, ν_1 es el entero inmediato mayor a $\frac{(k_{1LD_1} - k_1^*)}{\varepsilon}$
4. Calcular el ancho de retícula a analizar $\varepsilon_1 = \frac{(k_{1LD_1} - k_1^*)}{\nu_1}$
5. Analizar si la tolerancia satisface los requerimientos del paso 1. Si $\varepsilon_1 \leq \alpha\varepsilon$ ir al paso 9 de lo contrario continuar con el paso 6.
6. Calcular los ν_1 nuevos “puntos de partida de análisis” $(k_1^* + n\varepsilon_1, k_2^*) \forall n = 0, 1, 2, \dots, \nu_1$. Obteniendo así $\{K_1^*(k_{11}^*, k_{12}^*), K_2^*(k_{21}^*, k_{22}^*), \dots, K_{\nu_1}^*(k_{\nu_1 1}^*, k_{\nu_1 2}^*)\}$
7. Para cada nuevo punto de partida de análisis, manteniendo constante k_{i1}^* se obtienen las cotas mínima y máxima estimadas para el parámetro k_{i2}^* : $k_{i2_{me}}$ y $k_{i2_{Me}}$ respectivamente. Dichas cotas se obtienen mediante el algoritmo descrito en la sección 4.3.
8. Regresar al paso 2 calculando el punto de partida de análisis $K^*(k_1^*, k_2^*)$ de la siguiente manera. $k_1^* = k_{\nu_1 1}^*$, $k_2^* = \frac{k_{\nu_1 2_{me}} + k_{\nu_1 2_{Me}}}{2}$.
9. Analizar la estabilidad robusta relativa en el conjunto de cajas rectangulares con lados paralelos a los ejes K_1 y K_2 con vertices A_i , B_i , C_i , D_i definidos de

la siguiente manera. $k_{Ai1} = k_{i1}^*$, $k_{Ai2} = \max\{k_{i2_{me}}, k_{(i+1)2_{me}}\}$; $k_{Bi1} = k_{(i+1)1}^*$, $k_{Bi2} = k_{Ai2}$; $k_{Ci1} = k_{Bi1}$, $k_{Ci2} = \min\{k_{i2_{Me}}, k_{(i+1)2_{Me}}\}$; $k_{Di1} = k_{Ai1}$, $k_{Di2} = k_{Ci2}$.

10. Aplicar “partición de cajas” a cada caja a analizar en donde no se satisfaga las condiciones de estabilidad robusta. Cada una de estas cajas se particiona equidistantemente en cuatro subcajas, a cada una se le aplica el análisis de estabilidad robusta relativa. El procedimiento de partición se aplica nuevamente en cada subcaja que no satisfaga las condiciones de estabilidad. El procedimiento termina cuando el ancho o alto de la subcaja a analizar es menor o igual a α, ε .
11. Después de haber analizado la estabilidad robusta de todas las cajas, se realiza un barrido en k_3^* desplazandose una tolerancia ε y repitiendo el algoritmo desde el paso 2 de manera iterativa, hasta encontrar una la región del conjunto de controladores que satisfacen estabilidad robusta.

4.6 EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

En este ejemplo, se determinan las ganancias de un controlador PID de un sistema LTI con incertidumbre paramétrica. Se desea que la parte real del polinomio característico en lazo cerrado este dentro de una región definida por el segmento $[-0.4, -0.1]$

Usando el teorema de estabilidad relativa, se analizan la estabilidad robusta de los polinomios $p(s - a)$ y $p(-s - b)$ donde $a = 0.1$, $b = 0.4$. Entonces, la estabilidad robusta de cada polinomio $p(s - a)$ y $p(-s - b)$ serán analizados utilizando el criterio de estabilidad de C. Elizondo [21], y aplicando “descomposición de signo” se probará la positividad robusta de los elementos $e_{i,1}$. Si cada elemento $e_{i,1}$ es robustamente positivo entonces, la columna entera será positiva y el polinomio del sistema analizado será robustamente estable. Los coeficientes de cada polinomio a analizar son:

$$p(s - a, q) = C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q)$$

$$C_3(q) = 10.45q_5 + 1.1q_1q_5,$$

$$C_2(q) = 0.3q_2q_5 - 0.33q_1q_5 - 0.285q_5 + q_4q_5q_6$$

$$C_1(q) = 1.6435q_5 + 0.033q_1q_5 - 0.06q_2q_5 + 0.2q_3q_5 + q_4q_5 - 0.2q_4q_5q_6,$$

$$C_0(q) = q_4 - 0.17195q_5 - 0.0011q_1q_5 + 0.003q_2q_5 - 0.02q_3q_5 - 0.1q_4q_5 + 0.01q_4q_5q_6,$$

$$\begin{aligned} e_{3,1}(q) = & 0.4788q_2q_5^2 - 0.35112q_1q_5^2 + 0.152q_3q_5^2 + 0.76q_4q_5^2 + 1.3285q_5^2 - 0.00968q_1^2q_5^2 - \\ & 0.018q_2^2q_5^2 - 10.45q_4q_5 - 0.2q_4^2q_5^2q_6^2 + 0.0264q_1q_2q_5^2 - 0.044q_1q_3q_5^2 - 0.22q_1q_4q_5^2 + \\ & 0.06q_2q_3q_5^2 + 0.3q_2q_4q_5^2 + 1.596q_4q_5^2q_6 + q_4^2q_5^2q_6 - 1.1q_1q_4q_5 + 0.088q_1q_4q_5^2q_6 - \\ & 0.12q_2q_4q_5^2q_6 + 0.2q_3q_4q_5^2q_6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{4,1}(q) = & 1.0648 \times 10^{-5}q_1^3q_5^3 - 5.808 \times 10^{-5}q_1^2q_2q_5^3 + 2.42 \times 10^{-4}q_1^2q_3q_5^3 - \\ & 1.936 \times 10^{-4}q_1^2q_4q_5^3q_6 + 0.00121q_1^2q_4q_5^3 - 0.00847q_1^2q_4q_5^2 + 2.0507 \times 10^{-3}q_1^2q_5^3 + \\ & 9.9 \times 10^{-5}q_1q_2^2q_5^3 - 7.26 \times 10^{-4}q_1q_2q_3q_5^3 + 0.00066q_1q_2q_4q_5^3q_6 - 0.00363q_1q_2q_4q_5^3 + \\ & 0.0231q_1q_2q_4q_5^2 - 6.1195 \times 10^{-3}q_1q_2q_5^3 + 0.00088q_1q_3^2q_5^3 - 0.00242q_1q_3q_4q_5^3q_6 + \\ & 0.0088q_1q_3q_4q_5^3 - 0.022q_1q_3q_4q_5^2 + 1.4421 \times 10^{-2}q_1q_3q_5^3 + 0.0011q_1q_4^2q_5^3q_6^2 - \\ & 0.0121q_1q_4^2q_5^3q_6 + 0.022q_1q_4^2q_5^3 + 0.077q_1q_4^2q_5^2q_6 - 0.11q_1q_4^2q_5^2 - 1.1q_1q_4^2q_5 - \\ & 2.0398 \times 10^{-2}q_1q_4q_5^3q_6 + 7.2105 \times 10^{-2}q_1q_4q_5^3 - 0.15048q_1q_4q_5^2 + \\ & 5.8914 \times 10^{-2}q_1q_5^3 - 5.4 \times 10^{-5}q_2^3q_5^3 + 0.00054q_2^2q_3q_5^3 - 0.00054q_2^2q_4q_5^3q_6 + \\ & 0.0027q_2^2q_4q_5^3 - 0.018q_2^2q_4q_5^2 + 4.5315 \times 10^{-3}q_2^2q_5^3 - 0.0012q_2q_3^2q_5^3 + 0.0036q_2q_3q_4 \\ & q_5^3q_6 - 0.012q_2q_3q_4q_5^3 + 0.06q_2q_3q_4q_5^2 - 1.9437 \times 10^{-2}q_2q_3q_5^3 - 0.0018q_2q_4^2q_5^3q_6^2 + \\ & 0.018q_2q_4^2q_5^3q_6 - 0.03q_2q_4^2q_5^3 - 0.12q_2q_4^2q_5^2q_6 + 0.3q_2q_4^2q_5^2 + 0.03021q_2q_4q_5^3q_6 - \\ & 9.7185 \times 10^{-2}q_2q_4q_5^3 + 0.44745q_2q_4q_5^2 - 7.8344 \times 10^{-2}q_2q_5^3 - 0.004q_3^2q_4q_5^3q_6 - \\ & 0.00304q_3^2q_5^3 + 0.006q_3q_4^2q_5^3q_6^2 - 0.04q_3q_4^2q_5^3q_6 + 0.2q_3q_4^2q_5^2q_6 - 0.06479q_3q_4q_5^3q_6 - \\ & 0.0304q_3q_4q_5^3 + 0.361q_3q_4q_5^2 - 5.2706 \times 10^{-2}q_3q_5^3 - 0.002q_4^3q_5^3q_6^2 + 0.03q_4^3q_5^3q_6^2 - \\ & 0.1q_4^3q_5^3q_6 - 0.2q_4^3q_5^2q_6^2 + q_4^3q_5^2q_6 + 0.05035q_4^2q_5^3q_6^2 - 0.32395q_4^2q_5^3q_6 - 0.076q_4^2q_5^3 + \\ & 1.4915q_4^2q_5^2q_6 + 1.805q_4^2q_5^2 - 10.45q_4^2q_5 - 0.26115q_4q_5^3q_6 - 0.26353q_4q_5^3 + \end{aligned}$$

$$3. 125 4q_4q_5^2 - 0.228 44q_5^3.$$

$$p(-s - b, q) = C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q)$$

$$C_3(q) = -10.45q_5 - 1.1q_1q_5,$$

$$C_2(q) = 0.3q_2q_5 - 1.32q_1q_5 - 9.69q_5 + q_4q_5q_6,$$

$$C_1(q) = 0.24q_2q_5 - 0.528q_1q_5 - 4.636q_5 - 0.2q_3q_5 - q_4q_5 + 0.8q_4q_5q_6,$$

$$C_0(q) = q_4 - 0.9728q_5 - 0.0704q_1q_5 + 0.048q_2q_5 - 0.08q_3q_5 - 0.4q_4q_5 + 0.16q_4q_5q_6,$$

$$\begin{aligned} e_{3,1}(q) = & 9.4301q_1q_5^2 - 3.2148q_2q_5^2 + 1.102q_3q_5^2 + 5.51q_4q_5^2 + 34.757q_5^2 + 0.61952q_1^2q_5^2 + \\ & 0.072q_2^2q_5^2 + 10.45q_4q_5 + 0.8q_4^2q_5^2q_6^2 - 0.4224q_1q_2q_5^2 + 0.176q_1q_3q_5^2 + 0.88q_1q_4q_5^2 - \\ & 0.06q_2q_3q_5^2 - 0.3q_2q_4q_5^2 - 10.716q_4q_5^2q_6 - q_4^2q_5^2q_6 + 1.1q_1q_4q_5 - 1.408q_1q_4q_5^2q_6 + \\ & 0.48q_2q_4q_5^2q_6 - 0.2q_3q_4q_5^2q_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{4,1}(q) = & -4.3614 \times 10^{-2}q_1^3q_5^3 + 5.9474 \times 10^{-2}q_1^2q_2q_5^3 - 6.1952 \times 10^{-2}q_1^2q_3q_5^3 + \\ & 0.19825q_1^2q_4q_5^3q_6 - 0.30976q_1^2q_4q_5^3 + 0.54208q_1^2q_4q_5^2 - 1.2665q_1^2q_5^3 - \\ & 2.5344 \times 10^{-2}q_1q_2^2q_5^3 + 4.6464 \times 10^{-2}q_1q_2q_3q_5^3 - 0.16896q_1q_2q_4q_5^3q_6 + \\ & 0.23232q_1q_2q_4q_5^3 - 0.3696q_1q_2q_4q_5^2 + 1.0899q_1q_2q_5^3 - 0.01408q_1q_3^2q_5^3 + \\ & 0.15488q_1q_3q_4q_5^3q_6 - 0.1408q_1q_3q_4q_5^3 + 0.088q_1q_3q_4q_5^2 - 1.0032q_1q_3q_5^3 - \\ & 0.2816q_1q_4^2q_5^3q_6^2 + 0.7744q_1q_4^2q_5^3q_6 - 0.352q_1q_4^2q_5^3 - 1.232q_1q_4^2q_5^2q_6 + 0.44q_1q_4^2q_5^2 + \\ & 1.1q_1q_4^2q_5 + 3.6329q_1q_4q_5^3q_6 - 5.016q_1q_4q_5^3 + 7.6243q_1q_4q_5^2 - 11.62q_1q_5^3 + \\ & 3.456 \times 10^{-3}q_2^3q_5^3 - 0.00864q_2^2q_3q_5^3 + 0.03456q_2^2q_4q_5^3q_6 - 0.0432q_2^2q_4q_5^3 + \\ & 0.072q_2^2q_4q_5^2 - 0.22435q_2^2q_5^3 + 0.0048q_2q_3^2q_5^3 - 0.0576q_2q_3q_4q_5^3q_6 + 0.048q_2q_3q_4q_5^3 - \\ & 0.06q_2q_3q_4q_5^2 + 0.36845q_2q_3q_5^3 + 0.1152q_2q_4^2q_5^3q_6^2 - 0.288q_2q_4^2q_5^3q_6 + 0.12q_2q_4^2q_5^3 + \\ & 0.48q_2q_4^2q_5^2q_6 - 0.3q_2q_4^2q_5^2 - 1.4957q_2q_4q_5^3q_6 + 1.8422q_2q_4q_5^3 - 2.7132q_2q_4q_5^2 + \\ & 4.7957q_2q_5^3 + 0.016q_3^2q_4q_5^3q_6 - 0.08816q_3^2q_5^3 - 0.096q_3q_4^2q_5^3q_6^2 + 0.16q_3q_4^2q_5^3q_6 - \\ & 0.2q_3q_4^2q_5^2q_6 + 1.2282q_3q_4q_5^3q_6 - 0.8816q_3q_4q_5^3 + 0.266q_3q_4q_5^2 - 3.8526q_3q_5^3 + \\ & 0.128q_4^3q_5^3q_6^3 - 0.48q_4^3q_5^3q_6^2 + 0.4q_4^3q_5^3q_6 + 0.8q_4^3q_5^2q_6^2 - q_4^3q_5^2q_6 - 2.4928q_4^2q_5^3q_6^2 + \end{aligned}$$

$$6.1408q_4^2q_5^3q_6 - 2.204q_4^2q_5^3 - 9.044q_4^2q_5^2q_6 + 1.33q_4^2q_5^2 + 10.45q_4^2q_5 + 15.986q_4q_5^3q_6 - 19.263q_4q_5^3 + 24.591q_4q_5^2 - 33.812q_5^3.$$

Para el cálculo del conjunto de controladores PID que satisfagan la estabilidad robusta dentro de un segmento de los reales preestablecido, se fija un valor para uno de los parámetros del controlador PID (en este caso q_4) y es aplicado la metodología mostrada en [36], donde se obtienen la estabilidad robusta de sistemas LTI con incertidumbre paramétrica para dos parámetros del controlador. En la figura 4.9 el valor fijo es $q_4 = 1.4$ y se obtiene una región para los dos parámetros restantes q_5, q_6 donde se satisface estabilidad robusta.

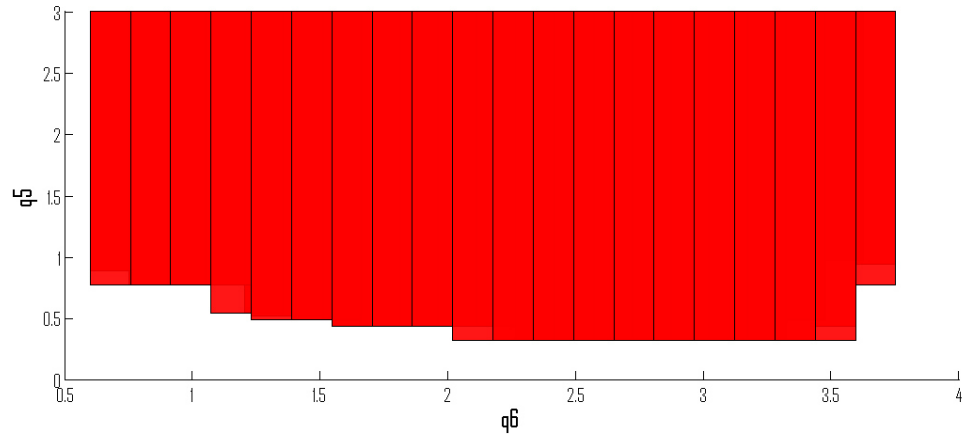


Figura 4.9: Valores de ganancia q_5, q_6 para $q_4 = 1.4$.

La figura 4.10 muestra los distintas ganancias que pueden tomar q_5, q_6 para diferentes valores de q_4 fijos y que además satisfacen las especificaciones de este ejemplo.

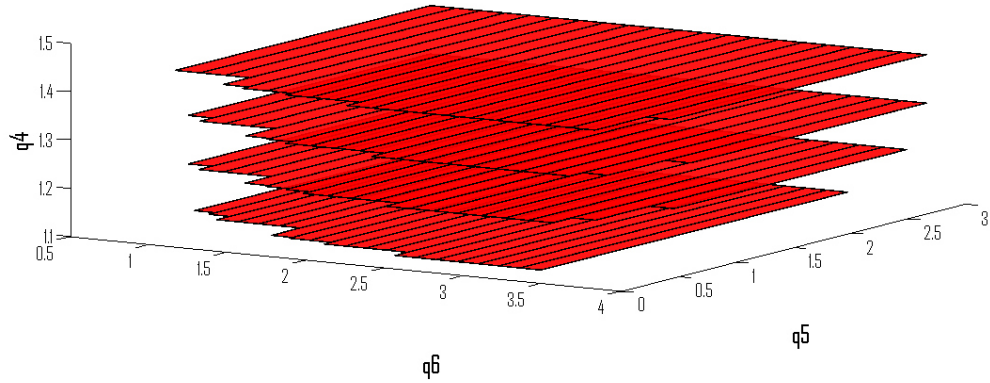


Figura 4.10: Valores de ganancia q_5, q_6 para distintos q_4 .

Después de aplicar sucesivamente el proceso de división de cajas (ver figura 3.9), finalmente se obtiene un conjunto de controladores que estabilizan robustamente el sistema en el intervalo deseado. Entonces para los polinomios $p(s - a)$ y $p(-s - b)$, se fija el valor de q_4 y después de un barrido de q_4 se obtiene la región de estabilidad mostrada en la figura 4.11 y 4.12 respectivamente.

La región de estabilidad robusta para el sistema LTI con incertidumbre paramétrica de este ejemplo es la intersección de las dos regiones anteriores. Ésta intersección indica los valores de q_3, q_4 y q_5 del controlador PID que hacen que la parte real del polinomio característico esten dentro de la región definida por el segmento $[-0.4, -0.1]$

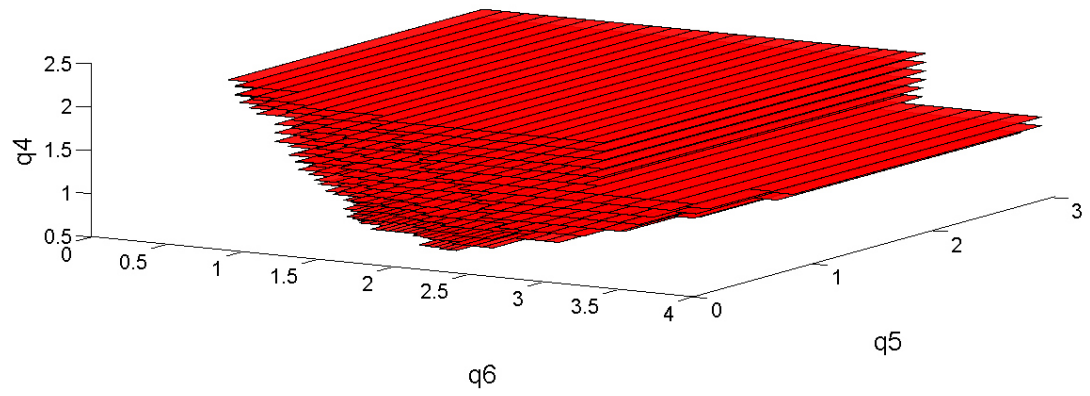


Figura 4.11: Conjunto de controladores PID para $p(s-a, q)$.

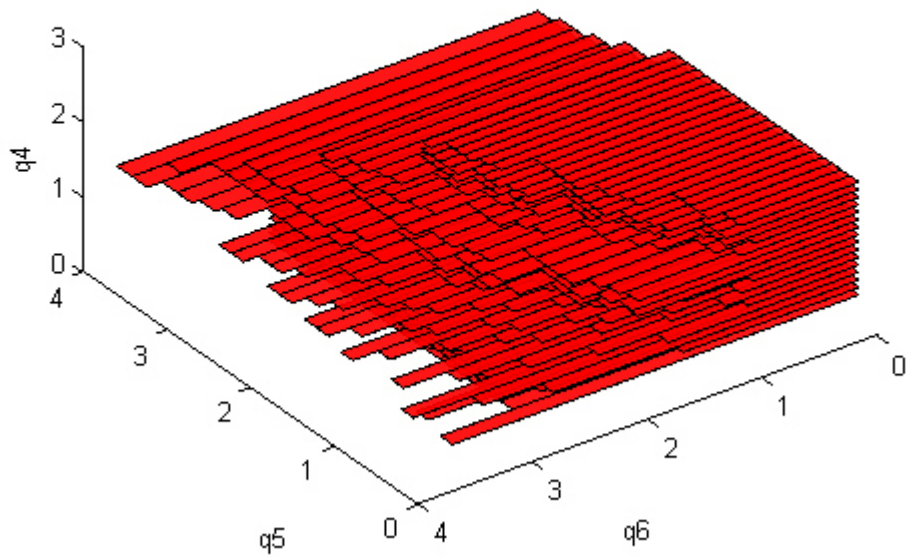


Figura 4.12: Conjunto de controladores PID para $p(-s-b, q)$.

CAPÍTULO 5

APLICACIONES

5.1 CONTROL DE VELOCIDAD DE UN MOTOR DE INDUCCIÓN.

Un motor de corriente alterna que no requiere de la corriente de campo dc para operar, es llamado motor de inducción. Estos tipos de motores realizan tareas considerables en diversos campos como fábricas textiles, de polvora, molinos de granos, aserraderos, etc. Casi todas las máquinas herramientas de un taller o fábrica son movidas por motores de inducción. Incluso en un hogar, los motores más grandes son motores monofásicos de inducción. En una fábrica típica casi todas las máquinas herramientas son manejadas de manera individual por diversos tamaños y clases de motores trifásicos de inducción. También puede tener un motor síncrono o más para mover las cargas grandes, como el sistema de ventilación o el sistema de aire del taller. Estos se usan por la mejoría en cuanto a factor de potencia, en su caso. Por último, las máquinas básicas; prensas, taladros, esmeriladoras, etc., tienen cada una un motor de inducción o más. El motor de inducción se elige por su sencillez, confiabilidad y bajo costo. Estas características se combinan con una buena eficiencia, aceptable capacidad para sobrecarga y un requerimiento mínimo o nulo de mantenimiento. Un motor de inducción tiene una sola fuente de energía que alimenta las

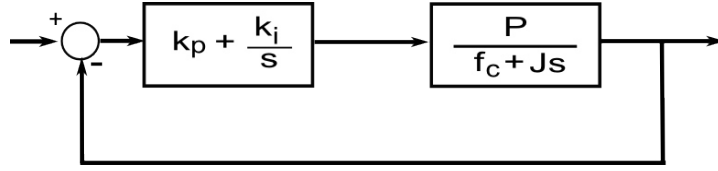


Figura 5.1: Sistema con retroalimentación unitaria en cascada con un controlador PI

bobinas fijas del estator. La excitación para el rotor se consigue por inducción o acción de transformador.

5.1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El modelo dinámico lineal de un motor de inducción se puede expresar y simplificar de acuerdo a [16] , y se representa mediante el diagrama de bloques mostrado en la figura 5.1 De acuerdo a la nomenclatura para la teoría de control robusto, se tienen las funciones de transferencias con los siguientes parámetros de la planta y el controlador:

$$G(s) = \frac{P}{f_c + Js} = \frac{q_1}{q_2 + q_3 s}$$

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = q_4 + \frac{q_5}{s}$$

Donde: J : Momento de inercia.

f_c : Frecuencia nominal.

P : Número de polos.

k_p : Ganancia proporcional.

k_i : Constante de tiempo integral.

El polinomio característico en lazo cerrado es:

$$P(s, q) = q_1 s^2 + (q_2 + q_3 q_4) s + q_3 q_5$$

Los parámetros del sistema con 5 % de incertidumbre son como sigue:

$$q_1 \in (2.1, 1.9)$$

$$q_2 \in (0.001083, 0.001197)$$

$$q_3 \in (0.02945, 0.03255)$$

En aplicaciones industriales, normalmente es necesario que el sistema tenga un cierto desempeño, para esto es necesario que las raíces de su polinomio característico guarden cierta posición en el plano de los complejos. Con la finalidad de mostrar lo anterior en este ejemplo se requiere la construcción del conjunto de parámetros de los diversos controladores PI que satisfagan estabilidad robusta paramétrica en una región predeterminada. Las raíces reales del polinomio característico en lazo cerrado tienen que permanecer dentro del segmento $[-5, -2]$ en el plano complejo, con una tolerancia de 0.01.

5.1.2 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Se hace uso del teorema de estabilidad relativa [22] para obtener dos polinomios característicos $p(s - a, q)$ y $p(-s - b, q)$ donde $a = 2$ y $b = 5$, así las raíces reales del polinomio característico se encuentran en la región predeterminada.

Mediante el criterio de estabilidad de C. Elizondo [21] se obtienen dos tablas correspondientes a cada polinomio $(p(s - a, q), p(-s - b, q))$ y aplicando el algoritmo descrito anteriormente con base en Descomposición de Signo, se analiza la positividad robusta de cada elemento e_i de cada tabla. El algoritmo propuesto determina si el sistema es robustamente estable en la región predeterminada si y solo si todos los elementos e_i son positivos.

Los coeficientes de las tablas son de la siguiente manera:

$$p(s - a, q) = C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q)$$

$$C_2(q) = q_1,$$

$$C_1(q) = (q_2 - 4q_1 + q_3q_4),$$

$$C_0(q) = (4q_1 - 2q_2 - 2q_3q_4 + q_3q_5),$$

$$e_{31}(q) = -16q_1^2 + 12q_1q_2 + 12q_1q_3q_4 - 4q_5q_1q_3 - 2q_2^2 - 4q_2q_3q_4 + q_5q_2q_3 - 2q_3^2q_4^2 + q_5q_3^2q_4.$$

$$p(-s - b, q) = C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q).$$

$$C_2(q) = q_1,$$

$$C_1(q) = (10q_1 - q_2 - q_3q_4),$$

$$C_0(q) = (25q_1 - 5q_2 - 5q_3q_4 + q_3q_5),$$

$$e_{31}(q) = 250q_1^2 - 75q_1q_2 - 75q_1q_3q_4 + 10q_5q_1q_3 + 5q_2^2 + 10q_2q_3q_4 - q_5q_2q_3 + 5q_3^2q_4^2 - q_5q_3^2q_4.$$

Aplicando el algoritmo descrito anteriormente se parte de $K^*(5, 6)$, el conjunto de controladores que satisfacen estabilidad robusta para cada polinomio es presentado en las figuras 5.2 y 5.3.

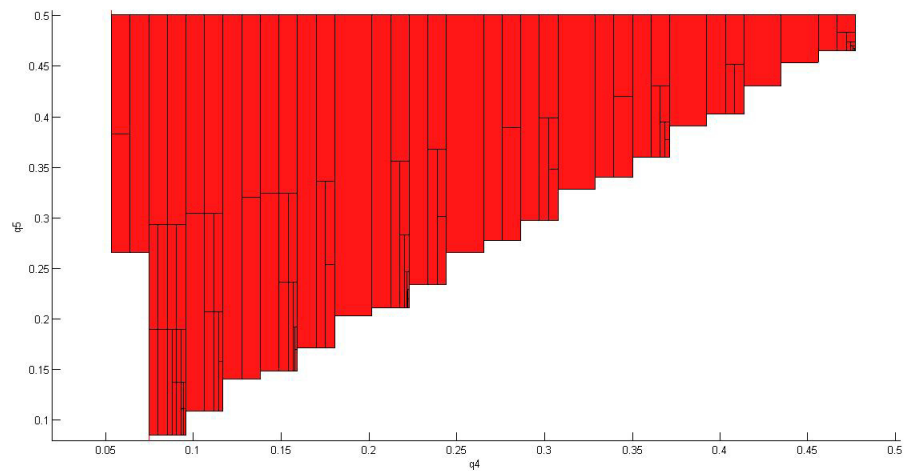


Figura 5.2: Región de Estabilidad Robusta dada por los parámetros del controlador para $p(s - a)$.

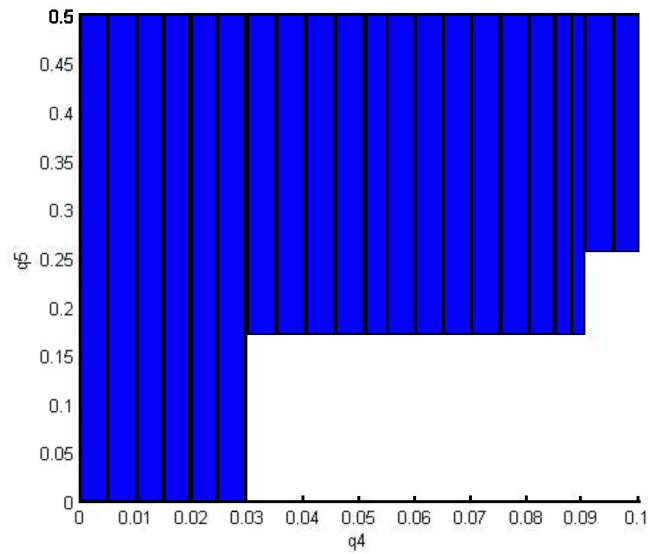


Figura 5.3: Región de Estabilidad Robusta dada por los parámetros del controlador para $p(-s - b)$.

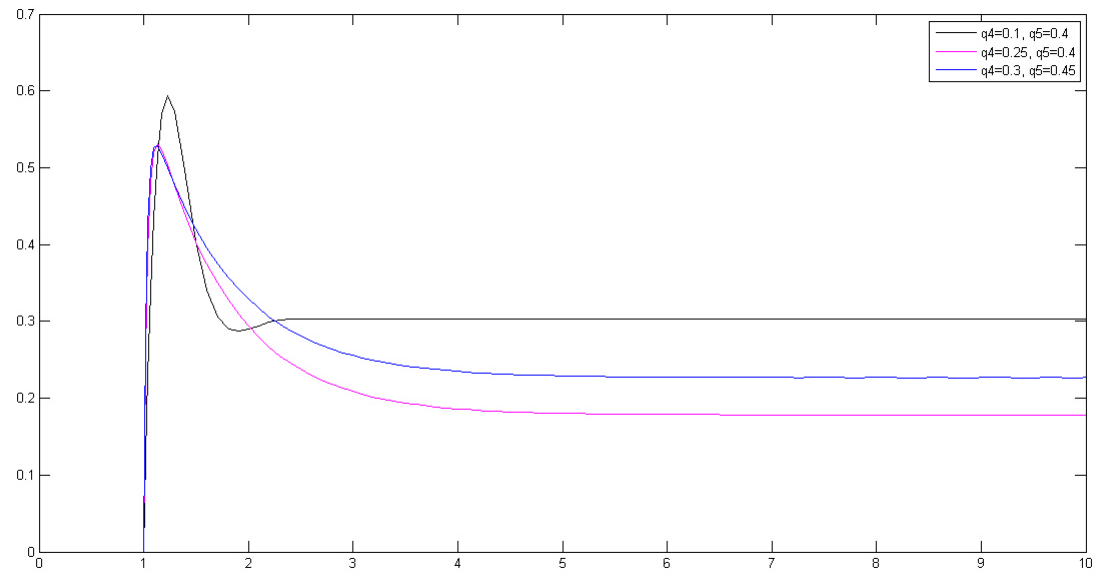


Figura 5.4: Respuesta del sistema para una entrada escalón en la región de estabilidad robusta.

5.2 CONTROL DE UN MISIL

Los misiles son utilizados como arma principal en la guerra moderna de alta tecnología, un misil es cada vez más inteligente y preciso. Esto requiere que su sistema de control sea más rápido, preciso y robusto. Entre los diversos sistemas de control, el sistema de control PID es el más ampliamente utilizado sin embargo, la incertidumbre paramétrica rara vez se tiene en cuenta en el diseño de sistemas de control robusto.

5.2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La función de transferencia del motor de dirección del misil se puede simplificar como una función típica de segundo orden de acuerdo a [45]:

$$G(s, q) = \frac{1}{q_1^2 s^2 + q_1 q_2 s + 1}.$$

Donde,

q_1 , es la constante de tiempo del motor de dirección.

q_2 , se define como el coeficiente de amortiguación.

Si consideramos un controlador PID:

$$C(s, q) = q_3 + \frac{q_4}{s} + q_5 s$$

Donde,

q_3 , es la ganancia proporcional.

q_4 , determina la constante de tiempo integral.

q_5 , es la constante de tiempo derivativa.

El sistema de control del misil en cascada con un controlador PID se muestra en la figura 5.5: El polinomio característico en lazo cerrado es:

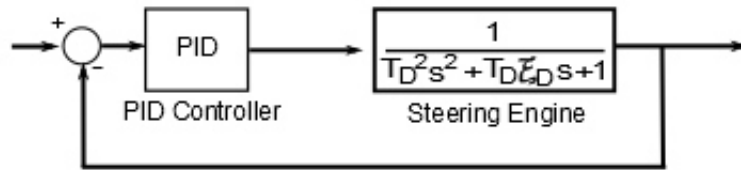


Figura 5.5: Diagrama de bloques del sistema completo.

$$p(s) = (q_1^2 + q_5) s^2 + (q_3 + 2q_1q_2) s + (q_4 + 1).$$

Para este ejemplo de aplicación, la incertidumbre en cada parámetro es del 5 % y esta representada por los siguientes parámetros:

$$q_1 \in (0.0095, 0.0105)$$

$$q_2 \in (0.665, 0.735)$$

Se requiere que las raíces reales del polinomio característico en lazo cerrado se encuentren dentro del segmento $[-5, -1]$ del plano de los complejos.

5.2.2 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Obtenemos dos polinomios característicos $p(s - a, q)$ y $p(-s - b, q)$ donde $a = 1$ y $b = 5$ mediante el teorema de estabilidad relativa 2.3.2 descrito también en [22]. Con esto se asegura que la parte real de las raíces del polinomio característico se encuentran en $[-5, -1]$.

Haciendo uso del criterio de estabilidad de C. Elizondo [21] se obtienen nuevamente dos tablas correspondientes a cada polinomio $(p(s - a, q), p(-s - b, q))$ y finalmente aplicamos el algoritmo capaz de determinar la positividad robusta de cada elemento e_i de cada tabla.

Los coeficientes de las tablas son como se muestra a continuación:

$$p(s - a, q) = C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q).$$

$$C_2(q) = (q_1^2 + q_5),$$

$$C_1(q) = (2q_2q_1 - 4q_1^2 + q_3 - 4q_5),$$

$$C_0(q) = (4q_1^2 - 4q_2q_1 - 2q_3 + q_4 + 4q_5 + 1),$$

$$\begin{aligned}
e_{3,1}(q) = & q_3 - 4q_5 + 12q_1^2q_3 + 24q_1^3q_2 - 4q_1^2q_4 - 32q_1^2q_5 - 4q_1^2 - 16q_1^4 - \\
& 2q_3^2 - 16q_5^2 - 8q_1^2q_2^2 + 2q_1q_2 + q_3q_4 + 12q_3q_5 - 4q_4q_5 - 8q_1q_2q_3 + \\
& 2q_1q_2q_4 + 24q_1q_2q_5.
\end{aligned}$$

$$p(-s - b, q) = C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q).$$

$$C_2(q) = (q_1^2 + q_5),$$

$$C_1(q) = (10q_1^2 - 2q_2q_1 - q_3 + 10q_5),$$

$$C_0(q) = (25q_1^2 - 10q_2q_1 - 5q_3 + q_4 + 25q_5 + 1),$$

$$\begin{aligned}
e_{3,1}(q) = & 10q_5 - q_3 - 75q_1^2q_3 - 150q_1^3q_2 + 10q_1^2q_4 + 500q_1^2q_5 + 10q_1^2 + 250q_1^4 + \\
& 5q_3^2 + 250q_5^2 + 20q_1^2q_2^2 - 2q_1q_2 - q_3q_4 - 75q_3q_5 + 10q_4q_5 + 20q_1q_2q_3 - \\
& 2q_1q_2q_4 - 150q_1q_2q_5.
\end{aligned}$$

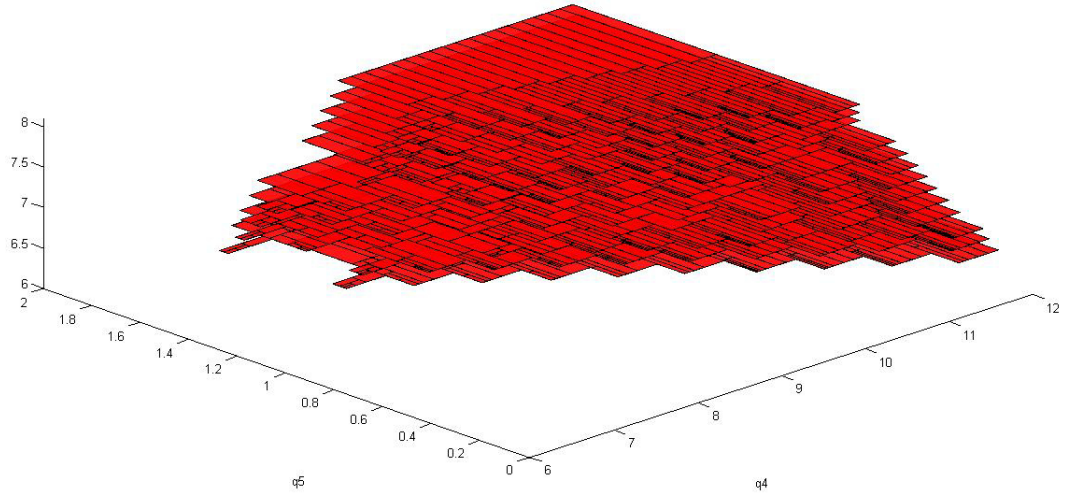


Figura 5.6: Región de Estabilidad Robusta dada por los parámetros del controlador para $p(s - a)$

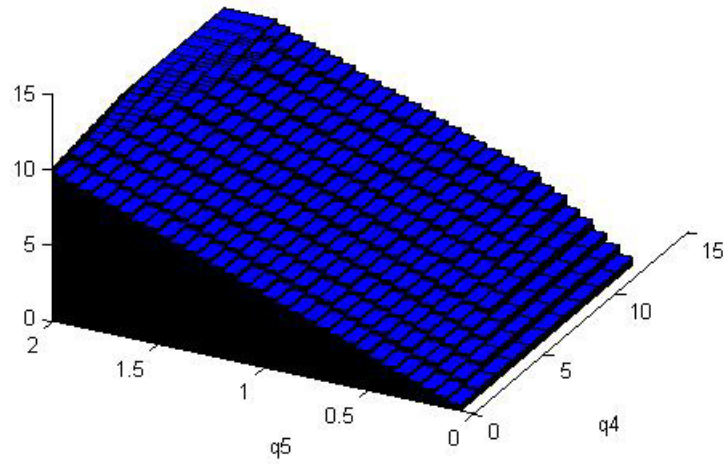


Figura 5.7: Región de Estabilidad Robusta dada por los parámetros del controlador para $p(-s - b)$

El conjunto de controladores PID que satisfacen estabilidad robusta para el segmento $[-5, -1]$ es la intersección de ambas regiones.

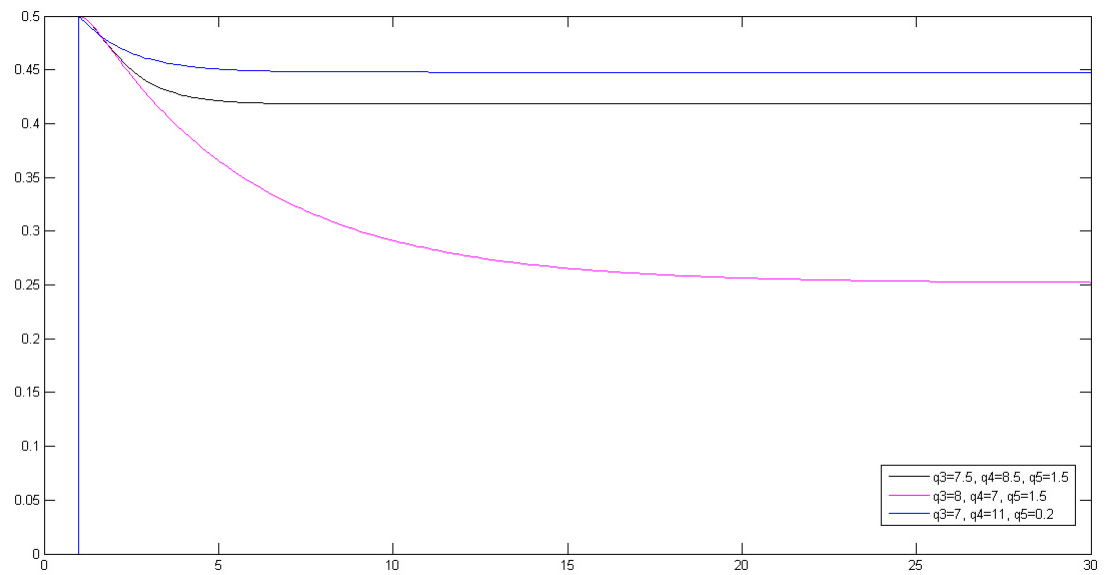


Figura 5.8: Respuesta a un escalón unitario mostrando un equilibrio en el sistema

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PARA TRABAJO A FUTURO

Este trabajo considera el problema abierto de análisis y síntesis de un conjunto de controladores para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica, donde los coeficientes del polinomio característico en lazo cerrado contienen los parámetros tanto de la planta como del controlador. Los coeficientes de la familia de polinomios característicos generados por la incertidumbre paramétrica son funciones multivariantes polinómicas, es decir el caso más complejo.

En esta tesis se ha propuesto un nuevo enfoque (algoritmo) para la construcción del conjunto de controladores PID que permitan la estabilidad robusta para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica. El problema es, básicamente mapeado a un problema de positividad robusta de funciones multivariantes polinómicas y resuelto con la herramienta matemática “descomposición de signo” o “Descomposición de signo definida”.

El problema de positividad robusta de funciones multivariantes polinómicas es considerado un problema NP-hard (non-deterministic polynomial-time hard) en la teoría de complejidad computacional. La solución a problemas NP-hard es complicada y tardada, la importancia de contar con una herramienta capaz de dar solución a este tipo de problemas es de gran ayuda para distintos enfoques. “Descomposición de signo” es la base matemática del algoritmo que permite el desarrollo de este

trabajo debido a las ventajas sobre otras herramientas.

Es ampliamente reconocido que un modelo preciso de la planta puede no estar disponible al momento del diseño del controlador. Una característica novedosa del algoritmo es precisamente, el tomar un modelo empírico de la planta sabiendo que existe incertidumbre en cada uno de sus parámetros que generan una familia de plantas y permite encontrar un conjunto de controladores que satisfacen estabilidad robusta a cada una de éstas plantas.

Es inevitable que el número de particiones y cajas a ser analizados se incrementa si se incrementa el número de parámetros o si se requiere mayor precisión del conjunto de controladores que satisfagan estabilidad robusta. En general, el coste computacional depende del sistema y el tamaño de la cuadrícula de analizar.

Este trabajo se enfoca en la estabilidad robusta paramétrica de sistemas LTI en donde la parte real de las raíces del polinomio característico se encuentran contenidas en una región en específico dentro del plano de los complejos y deja abierto la posibilidad de aplicarse un procedimiento o algoritmo combinado que permita el acotamiento frecuencial en el mismo plano-s, esto es, el acotamiento de la parte imaginaria y así todas las raíces (reales e imaginarias) del polinomio característico estarán contenidas en una región que satisface un mejor y más detallado desempeño para distintas aplicaciones industriales.

El problema considerado en esta tesis es fundamental, ya que es de vital importancia el buen diseño de controladores robustos para diversas aplicaciones en la industria, en donde no es tomada en cuenta la incertidumbre paramétrica. El procedimiento sistemático desarrollado en esta tesis podría facilitar el desarrollo de nuevas aplicaciones y algoritmos de control en diversas áreas del conocimiento. Los resultados obtenidos en este trabajo son para sistemas de tiempo continuo, pero se pueden ampliar para los sistemas de tiempo discreto en un trabajo a futuro.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Ackermann. *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters* Springer-Verlag, London. 1993
- [2] J. Ackerman. *Parameter Space Design of Robust Control Systems*, IEEE Trans. on Auto.Control. Vol. AC-25, No. 5, 1980, pp. 1058-1072.
- [3] J. Ackermann. *Robust Control: The Parameter Space Approach* Springer-Verlag, London, UK. 2002.
- [4] K.J. Astrom, T. Hagglund. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning Instrument. (second edition)* Society of American, Research Triangle Park, NC. 1995
- [5] K.J. Astrom, R.M. Murray. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers* Princeton University Press, ISBN: 1400828732, 9781400828739. 2010.
- [6] R.B. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan, New York, NY. 1994
- [7] A.C. Bartlet, C.V. Hollot and Huang Lin. Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1:61-71, 1988.

-
- [8] S. N. Bernstein *Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul des probabilites*, Communications de la Societe Mathematique de Kharkov 2. Series XIII. 1912.
 - [9] S.P. Bhattacharyya, H.Chapellat and L.H.Keel *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1995
 - [10] S.P. Bhattacharyya. *Robust Stabilization Against Structured Perurbations*, Springer-Verlag, New York, 1987.
 - [11] S.P.Bhattacharyya, A. Datta y L.H Keel . *Linear Control Theory. Structure, Robustness and Optimization*. Taylor and Francis Group. Boca Raton,London, New York, (2009).
 - [12] Bialkowski, W.L. *Control of the pulp and paper making process*. In: The Control Handbook, (Editor: W.S. Levine), pp. 1219-1242. CRC/IEEE Press, Boca Raton, Florida, 1996.
 - [13] M.Bozorg, H.D. Sherali, E.J. Davison and A. Delavar-Khalafi.*Parameter Stability Margins for Polynomial Uncertainty Structures: A Polynomial Programming Approach* Dept. of Mechanical Eng., University of Yazd,Iran.
 - [14] A.Cavallo, G. de María, and L. Verde. *Robust Fligh Control Systems: A Parameter Space Design*, AIAA J. of Guid., Control, Vol. AC-33,No.11, Nov. 1988.
 - [15] H.Chapellat, L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya *Robust stability manifolds for multilinear interval systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 34, 314-318. 1993.
 - [16] M. Chebre, M. Zerikat, Y. Bendaha, *Adaptation des Parametres d un Controleur PI par un FLC Applique a un Moteur Asynchrone*, 4th International Conference on Computer Integrated Manufacturing CIP 2007, 03-04, Setif, Algeria, 2007.
 - [17] de la Llave, R. *In Computer Aided Proofs in Analysis (Ed. K. Meyer and D. Schmidt)*. New York: Springer-Verlag, 1991.

-
- [18] T. E. Djaferis. *Robust Control Design: A Polynomial Approach*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA. 1995.
- [19] C. Elizondo. *Estabilidad y Controlabilidad Robusta de Sistemas Lineales con Incertidumbre Multilineal*. Programa Doctoral de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León, 1999.
- [20] C. Elizondo. *Necessary and Sufficient Conditions for Robust Positivity of Polynomial Functions Via Sign Decomposition*, Robust Control, Design IFAC ROCOND 2000, Prague Czech Republic, April 2000.
- [21] C. Elizondo. *A new stability criterion on space coefficients*. Conferences on Decision and Control IEEE, Orlando Florida USA, 2001.
- [22] C. Elizondo. *Análisis de Cotas de Raíces de Polinomios Característicos y Nuevo Criterio de Estabilidad*. AMCA 2005
- [23] Ender, D.B. *Optimal PID tuning using direct search algorithms*, IEE Computing and Control Engineering Journal, April, 51-56. 1993.
- [24] R. Graciano y C. Elizondo. *Herramientas para el análisis de Estabilidad Robusta de sistemas LTI con incertidumbre paramétrica*. AMCA, 2004.
- [25] M.J. Grimble, 2001, *Industrial Control Systems design*, John Wiley, Chichester, ISBN 0 471 49225 6.
- [26] Gutowski, M. W. *Power and Beauty of Interval Methods*. 20 Feb 2003.
- [27] Hend Dawood. *Theories of Interval Arithmetic: Mathematical Foundations and Applications* 2011, ISBN 978-3-8465-0154-2.
- [28] Y. Hijazi, H. Hagen, C. Hansen y K.I. Joy *Why interval arithmetic is so useful* Visualization of Large and Unstructured Data Sets: Applications in Geospatial Planning, Modeling and Engineering, 2007
- [29] D.G. Luenberg. *Optimization by vector Space Methods*. John Wiley & Sons, 1969.

-
- [30] J.P.How. *Robust Control Design with Real Parameter Uncertainty using Absolut Stability Theory*. Massachusetts Institute Technology, February, 1993.
- [31] S. Karlin, *Total Positivity*, Stanford University Press, 1967, chapter 6.
- [32] L.H.Keel y S.P.Bhattacharyya. *Fixed Order Multivariable Controller Synthesis: A New Algorithm*. Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico, 2008.
- [33] L.H. Keel and S.P. Bhattacharyya. *Fixed Order Multivariable Discrete-Time Control*. Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference,Shangai, P.R. China, December 16 – 18, 2009.
- [34] L.H. Keel and S.P. Bhattacharyya *Robust stability of complex systems with applications to performance attainment problems*. American Control Conference (ACC), July 2010
- [35] L.H. Keel and S.P. Bhattacharyya. *Robust Stability via Sign-Definite Decomposition*. IEEE Transactions on Automatic Control, January 2011.
- [36] López M.A., Elizondo C. y Posadas C. *Control para Estabilidad Robusta Relativa de Sistemas LTI con Incertidumbre Paramétrica*, AMCA2010, Puerto Vallarta, Jalisco, México.
- [37] V.L. Kharitonov. *Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations*, Differencial Uravnen, Vol.14, No.11, 1978,pp. 2086-2088.
- [38] Koivo, H.N., and J. T. Tantt. *Tuning of PID Controllers: Survey of SISO and MIMO Techniques*, Preprints of the IFAC International Symposium on Intelligent Tuning and Adaptive Control,January 1991.
- [39] K.Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall. 1980.
- [40] K.Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall. Tercera Edición 1998.

-
- [41] B. T. Polyak and J. Kogan. *Necessary and sufficient conditions for robust stability of linear systems with multiaffine uncertainty structure*. IEEE Transactions on Automatic Control, 40, 1255-1260. 1995
 - [42] D.D. Siljak. *Parameter Space Methods for Robust Control Design: A Guided Tour*. IEEE Trans. on Auto.Control. Vol.AC-34, No. 7, July 1989, pp.674-688.
 - [43] D.Siljak. *Robust D-Stability via Posivity.*, Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania,1998.
 - [44] M.Vicino y M.Milanse. *Robust stability of linear state space models via Bernstein Polynomials.*, Control of Uncertain Systems,eds. D. Hinrichsen and B. Martensson, Birkhauser, Boston, 1997.
 - [45] J. Yang, Modern missile guidance and control system design, Beijing: Aviation Industry Press, 2005.
 - [46] M.Zettler and J. Garloff.*Robustness analysis of polynomials with polynomial parameter dependency using Bernstein expansion*. IEEE Transactions on Automatic Control, 43, 425-431. (1998)
 - [47] Zhong Guan. *Iterated Bernstein polynomial approximations.*, Department of Mathematical Sciences, Indiana University South Bend.

RESUMEN AUTOBIOGRÁFICO

M.C. Mario Alberto López Vega

Candidato para obtener el grado de
Doctorado en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE UN CONJUNTO DE CONTROLADORES
ROBUSTOS MEDIANTE ACOTAMIENTO DE SUS PARÁMETROS PARA
SISTEMAS LTI CON INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA.

Fecha de nacimiento: 31 de Agosto de 1985, Lugar: Zacatecas, Zacatecas.

Padres: Cecilio López Ruíz y Blanca Catalina Vega de la Torre.

Esposa: Verónica Alejandra Salas Simental

Ingeniero en Electrónica y Comunicaciones por la Universidad Autónoma de Zacatecas en Agosto del 2008.

Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con orientación en control automático por la Universidad Autónoma de Nuevo León en Agosto del 2010.